

Dynamical systems III

Aufgabe ①

$$\text{ad}_2 A := \text{ad } A|_{H_2} : H_2 \rightarrow H_2$$

Sei $p \in H_2$. Dann gilt:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\text{ad } A \cdot p)(\underline{x}) = A p(\underline{x}) - Dp(\underline{x}) A \cdot \underline{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot p(\underline{x}) - Dp(\underline{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d.h. $\text{ad}_2 A$ bildet H_2 in sich ab.⇒ Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren.
(einsetzen)

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ xy - x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

→ Das Bild von $\text{ad}^A(H_2(\mathbb{R}^2))$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
ist $\text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \right)$

wird zu part. ...

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & 3 & \end{array}$$