

Aufgabe ②

Zuerst (d.h. bevor wir die Behauptung explizit nachrechnen) überlegen wir uns, ob diese Transformation überhaupt „sinnvoll ist“:

Das Vektorprodukt ist ein schiefsymmetrischer, linearer Operator und ebenso sind dies die Matrizen aus $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Beide Operatoren ~~haben~~ bilden jeweils einen 3-dimensionalen Raum von schiefsymmetrischen, linearen Operatoren.

Nachrechnen:

$$\text{Sei } A := \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}, \quad B \mapsto \begin{pmatrix} -g \\ f \\ -e \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & fc - bg & ag - ec \\ bg - cf & 0 & -af + be \\ ec - ag & -be + af & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA \mapsto \begin{pmatrix} af - be \\ ag - ec \\ +bg - fc \end{pmatrix}$$

sind gleich!

und es gilt:

$$\begin{pmatrix} -c \\ b \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g \\ f \\ -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -be + af \\ ag - ce \\ -cf + bg \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation:

(die ist eher eine physikalische Interpretation)

Diesen Zusammenhang zwischen Elementen aus $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ und 3-dim. Vektoren haben wir in der Mechanik kennengelernt,

genauer gesagt bei Rotation von starren

Körpern um eine Rotationsachse $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

Dann können wir die Rotation auch

durch eine Matrix beschreiben, und zwar

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als charakteristisches Polynom erhalten wir:

$$P(t) = -t^3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) t$$

$\Rightarrow$ Eigenwert 0 (einziger ^{reeller} Eigenwert)

Berechnung des zugehörigen Eigenvektors:

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\underline{\omega}$ ist Eigenvektor von $\underline{\omega}$
zum Eigenwert Null.

Auch die Aussage bedeutet, dass

(2)

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

$\psi \hat{=}$ the map from the
Propleten

$$\psi: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$$

$$\begin{aligned} \psi(a \cdot b - b \cdot a) &= \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi\left(-\begin{pmatrix} ae+bf & bg & -ag \\ -cf & ae+cg & af \\ -ce & be & bf+cg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ed+fb & fc & -ec \\ gb & ae+cg & eb \\ -ga & fa & bf+cg \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi\begin{pmatrix} 0 & fe-bg & ce-ag \\ gb-cf & 0 & eb-af \\ ga-ec & fa-be & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} fa-be & ce-ag & gb-cf \\ ce-ag & gb-cf & fa-be \\ gb-cf & fa-be & ce-ag \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & b \\ b & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g \\ f \\ -e \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bz \\ -ax+cz \\ -bx-cy \end{pmatrix}$$

Anschauung: (die man glaube ich nicht versteht) " $\psi(a)$ " " $\psi(b)$ "

