

Homework assignment

Matthias Bosewitz
Isabelle Schneider

Dynamical systems 3

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 7 \ 8 \\ \hline 4 \ 3 \ 4 \ 4_{+1} \end{array}$$

Aufgabe ⑤

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit $f_1, f_2 = \mathcal{O}(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)$

Wir wählen $W_m := \text{Ker } \text{ad}_m(A^T)$.

Dann gilt nach Lemma aus der Vorlesung

für die Normalform mit $g(x) = Ax + g_2 + \dots$

$$g(e^{A^T t} x) = e^{A^T t} g(x) \quad (\forall x, t)$$

Durch Differenzieren ergibt sich (differenzieren nach t)

$$\frac{d}{dt} (g(e^{A^T t} x) - e^{A^T t} g(x)) = Dg(e^{A^T t} x) \underbrace{e^{A^T t} A^T x}_{\text{id}} - \underbrace{A^T e^{A^T t}}_{\text{id}} g(x) \quad t=0$$

Sei $t=0$. Dann suchen wir nach einem

Polynom $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, das folgende

Gleichung erfüllt:

$$Dg(x_1, x_2) A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^T g(x_1, x_2) \quad (\text{d.h. } g \in \text{Ker } \text{ad } A^T)$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow g_1, g_2$ müssen folgende Gleichungen erfüllen:

$$x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow g_1(x_1, x_2) = g_1(x_1)$$

$$x_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = g_1(x_1)$$

$$g_1(x_1) = ax_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3)$$

$$\Rightarrow g_2(x_1, x_2) = ax_1 x_2 + bx_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3 + x_1^2 x_2)$$

a und b könnte man aus f noch genau bestimmen, aber dies ist hier wahrscheinlich nicht Sinn der Aufgabe!

Also erhalten wir für die Normalform:

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1^2 + O(x_1^3)$$

$$\dot{x}_2 = ax_1x_2 + bx_1^2 + O(x_1^3 + x_1^2x_2),$$

diese brechen wir nach der 2. Ordnung ab:

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1^2$$

$$\dot{x}_2 = bx_1^2 + ax_1x_2$$

Transformation auf Pendelgleichung

$$\ddot{x}_1 = g(x_1, \dot{x}_1)$$

$$y_1 := x_1, \quad y_2 := x_2 + bx_1^2$$

Dann erhalten wir mit neuen Koeffizienten α, β

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \beta y_1 y_2 + \alpha y_1^2$$

$$\text{d.h. } \dot{y}_1 = \beta y_1 y_2 + \alpha y_1^2$$

(Skalierung $y_1 \rightarrow \alpha = \pm 1$
Skalierung $y_2 \rightarrow \beta = \pm 1$
Vorzeichen $x_1, x_2, \dots$)

Laut Vorlesung können wir jetzt eine

Koordinatentransformation durchführen, sodass

$\alpha = 1$ und $\beta = \pm 1$ und der Einfachheit halber

werden wir von nun an folgende Normalform

benutzen:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 \pm x_1 x_2$$

Mit den 2 Parametern λ, μ „erfällt“ sich

der doppelte Eigenwert 0 in $\lambda = \mu = 0$ zum

Vektorfeld

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \lambda + \mu x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2$$

Als nächstes führen wir die Skalierung durch.
Sei „ $\cdot$ “ die Differentiation nach t und sei „ $'$ “
die Differentiation nach $\tilde{t}$.

Dann gilt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma^2 \tilde{x}_1' \sigma = \sigma^3 \tilde{x}_2 \\ \dot{x}_2 = \sigma^3 \tilde{x}_2 \sigma = \sigma^4 \tilde{\lambda} + \sigma^4 \tilde{\mu} x_1 + \tilde{x}_1^2 \sigma^4 \pm \sigma^5 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \end{cases}$$

$$\sigma \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1' = \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2' = \tilde{\lambda} + \tilde{\mu} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2 \pm \sigma \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \end{cases}$$

Jetzt zeichnen wir das Phasenportrait vom
Vektorfeld

$$\begin{cases} \tilde{x}_1' = \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2' = \tilde{\lambda} + \tilde{\mu} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2 \end{cases}$$

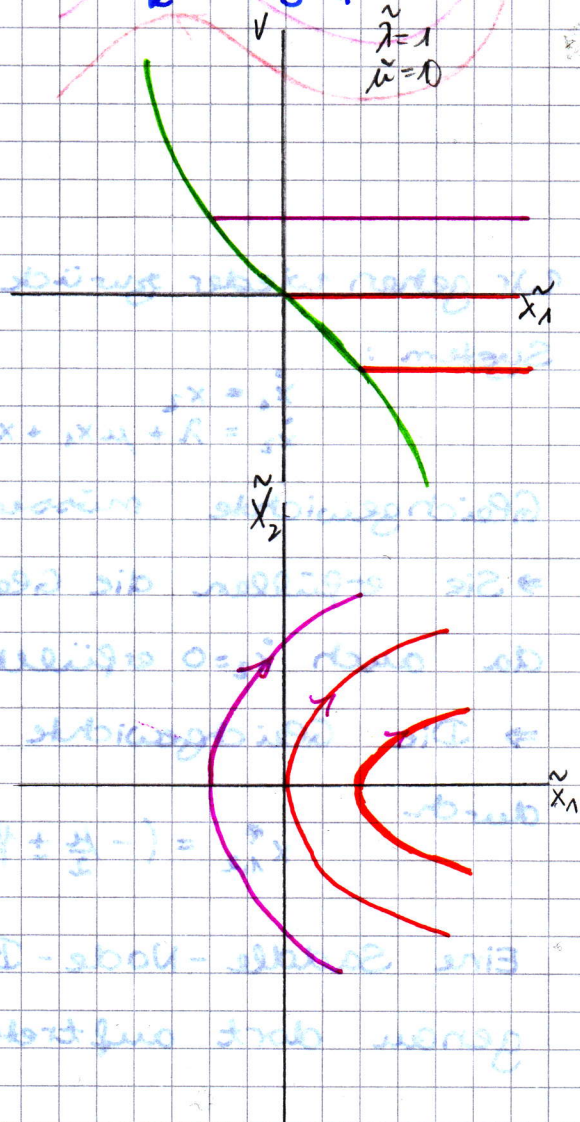
für verschiedene Parameter $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$:

$$\text{Sei } V'(\tilde{x}_1) = -g(\tilde{x}_1) \Rightarrow V(\tilde{x}_1) = -\tilde{\lambda} \tilde{x}_1 - \frac{\tilde{\mu}}{2} \tilde{x}_1^2 - \frac{1}{3} \tilde{x}_1^3 (+c)$$

$$\tilde{\mu}=0, \tilde{\lambda}=0$$



$$\tilde{\lambda}=1, \tilde{\mu}=0$$

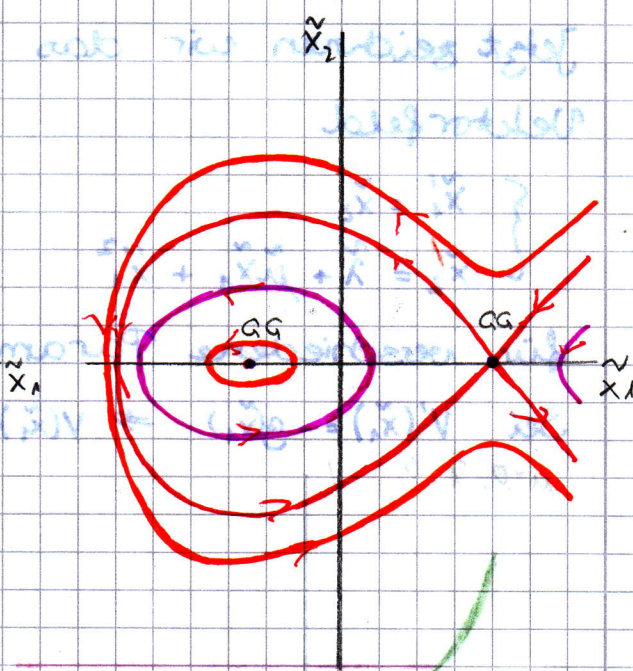
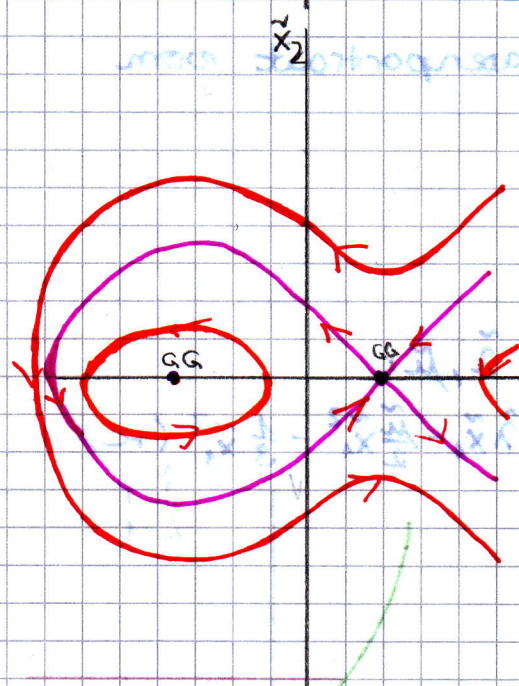
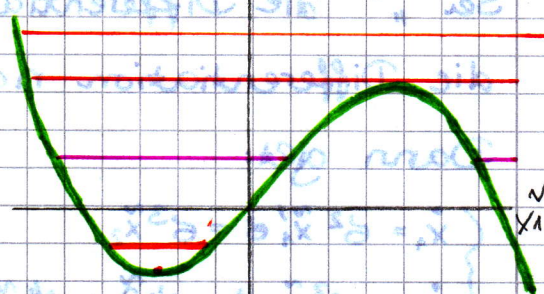
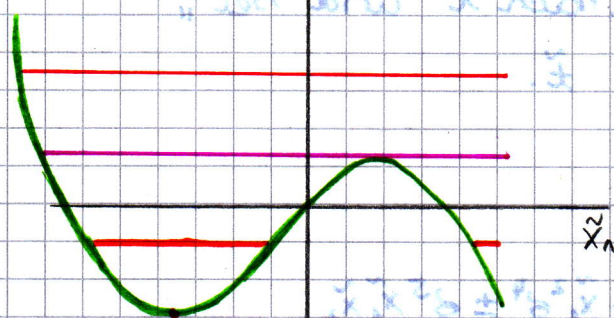


$$\tilde{\lambda} = -1$$

$$\tilde{\mu} = 1$$

$$\tilde{\lambda} = -1$$

$$\tilde{\mu} = -1$$



Wir gehen wieder zurück zum ursprünglichen

System :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \lambda + \mu x_1 + x_1^2 - x_1 x_2$$

Gleichgewichte müssen bei $x_2 = 0$ liegen. ($\dot{x}_1 = 0$)

⇒ Sie erfüllen die Gleichung $\lambda + \mu x_1 + x_1^2 = 0$,

da auch $\dot{x}_2 = 0$ erfüllt sein muss.

⇒ Die Gleichgewichte $x_{1,2}^*$ sind gegeben durch

$$x_{1,2}^* = \left(-\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda}, 0 \right)$$

Eine Saddle-Node-Bifurkation sollte also genau dort auftreten, wo

$\frac{\mu^2}{4} - \lambda = 0$ ist, denn dort gibt es genau ein Gleichgewicht. Dazu müssen wir noch überprüfen, ob wir für diese Parameter μ, λ einen einfachen Eigenwert Null haben.

Das ist so, denn die Jacobi-Matrix sieht dann wie folgt aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pm \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

d.h. das charakteristische Polynom ist

$P(t) = -t(\frac{1}{2}\mu - t) \Rightarrow 1$ einfacher Eigenwert Null, außer in $\lambda = \mu = 0$ (und dort wissen wir ja, dass wir einen doppelten Eigenwert Null haben).

Für die Hopf-Bifurkation suchen wir nach zwei rein imaginären Eigenwerten von einem der beiden Gleichgewichte.

Dazu betrachten wir die Jacobi-Matrix in einem beliebigen Gleichgewicht:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda} & \pm \frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda} \end{pmatrix}$$

(hier für "-", den Fall "+" erhält man analog oder durch Substitution $t \mapsto -t, x_2 \mapsto -x_2$)

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} P(t) &= -t(-\frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda} - t) \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda} \\ &= t^2 + t(\underbrace{\frac{1}{2}\mu \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda}}_{=: c}) \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ und "-", da $\frac{1}{2}c = \operatorname{Re}(\text{Eigenwerte})$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\pm \sqrt{\frac{\mu}{2}}$ rein imaginär für $\mu < 0$

$\Rightarrow$ Die Hopf-Kurve ist gegeben durch

$$\{(\lambda, \mu) \mid \lambda = 0, \mu < 0\}.$$