Dyn 3 — 28.04.2011

⑦ $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
$$(AB^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{b_{jk}}$$

(i) $\mathrm{ad}(A)^* = \mathrm{ad}(A^*)$

$$\Leftrightarrow \langle AB - BA, C \rangle \overset{\text{ii}}{=} \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} - a_{kj} b_{ik}) \overline{c_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} \overline{c_{ij}}) - \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{kj} b_{ik} \overline{c_{ij}})$$

$\| k \leftrightarrow i$ $\qquad$ $\| k \leftrightarrow j$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ki} b_{ij} \overline{c_{kj}}) - \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{jk} b_{ij} \overline{c_{ik}})$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij} \overline{(\overline{a_{ki}} c_{kj} - \overline{a_{jk}} c_{ik})}$$

$$= \langle B, A^* C - C A^* \rangle \qquad \square$$

(ii) $\mathrm{ad}(A)^* B \overset{(i)}{=} \mathrm{ad}(A^*) B = 0$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0,\ a = d$$

$$\Rightarrow \ker(\mathrm{ad}\, A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar\lambda & 0 \\ 0 & \bar\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\lambda & 0 \\ 0 & \bar\mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\bar\lambda a - a\bar\lambda} & b(\bar\lambda - \bar\mu) \\ c(\bar\mu - \bar\lambda) & \cancel{\bar\mu d - d\bar\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b(\overline{\lambda - \mu}) \\ c(\overline{\mu - \lambda}) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\underset{0 \neq \lambda \neq \mu \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $b = c = 0$ $\qquad \Rightarrow \ker(\mathrm{ad}\, A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in \mathbb{C} \right\}$

(iii) $\Psi_A(G) = G^{-1}AG = G^{-1} \circ A(G)$?

$(G \mapsto G^{-1})$ analytisch für invertierbare G:

$$G^{-1} = id - (G-id) + 2(G-id)^2 - 6(G-id)^3 \pm \dots$$

$(G \mapsto AG)$ $A(G)$ analytisch da linear

$\Rightarrow G^{-1} \circ A(G)$ analytisch ✓

$$\Psi_A(id+C) \overset{?}{=} (id - C)A(id+C) + \mathcal{O}(C^2)$$

$$= (id - C)(Aid + AC) + \mathcal{O}(C^2)$$

$$= Aid + AC - CAid + \mathcal{O}(C^2)$$

$$= \underbrace{A}_{\Psi_A(id)} + \underbrace{AC - CA}_{D\Psi_A(id)[C]} + \mathcal{O}(C^2) \quad ✓$$

□

---

(6) JNF:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ANF:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $(0 = 0\ ?)$

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_B ex nicht

$A, J = G^{-1}BG \Rightarrow G = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{sv-tu}\begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix}$ für geeignetes $G \in GL(n)$

$\Rightarrow$ für $|sv-tu| < \varepsilon$ kommt die Transformation nahe an eine Singularität

$\Rightarrow$ z.B.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_{\varepsilon \neq 0}$ aber $\varepsilon \to 0 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? passt nicht