

Aufgabe 8

Erstes Fazit: Wir haben beschlossen, den Weg zur Berechnung der Normalform nicht vollständig hier noch einmal aufzuschreiben. Wir haben $(y+x)A = \text{Bild}(\text{Idn } A^T)$ berechnet und dann mit den Summen der einzelnen Monome so lange herumgespielt, bis wir (hoffentlich alle) Elemente des Kerns bis zur zweiten Ordnung gefunden hatten:

$$\begin{pmatrix} z^2 x \\ z^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xz - yz \\ xz + yz \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für die Normalform:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(xz - yz) + bz^2 x \\ a(xz + yz) + bz^2 y \\ cz^2 + d(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Jetzt führen wir Parameter λ, μ ein,

und zwar wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(xz - yz) + bz^2 x \\ a(xz + yz) + bz^2 y \\ cz^2 + d(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

λ ist sicher so sinnvoll, da wir zwei komplex konjugierte Eigenwerte ohne Parameter haben, und die ja nicht „einfach so verschwinden“ können. μ könnte auch an einer anderen Stelle stehen, z. B. bei $*$.

Ähnlich wie bei der Hopf-Bifurkation in der Vorlesung könnte es auch hier sinnvoll sein, eine Koordinatentransformation durchzuführen:

$$x + iy \mapsto re^{i\varphi}, \quad r \geq 0$$

$$z \mapsto z$$

Damit erhalten wir:

⊗ Aufgabe

$$\begin{aligned} \dot{r} e^{i\varphi} + i r \dot{\varphi} e^{i\varphi} &= \dot{x} + i \dot{y} = \\ &= \lambda x + y + i(-x + \lambda y) + a(xz - yz) + i(a xz + a yz) + b z^2(x + i y) \\ &= \lambda(x + i y) + i(-x - i y) + a z(x + i y) + i a(x + i y)z + b z^2(x + i y) \\ &= (\lambda r - i r + a z r + i a z r + b z^2 r) e^{i\varphi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = r(\lambda + a z + b z^2) \quad \text{? } r^2 \text{ ?}$$

$$\dot{\varphi} = -1 + a z$$

$$\dot{z} = \mu + c z^2 + d r^2 \quad \text{mit } x^2 + y^2 = r^2$$

$\dot{r}$ und $\dot{z}$ sind von φ unabhängig

und außerdem $\dot{\varphi} \approx \text{konst}$ für $|a z| \ll 1$.

Deshalb betrachten wir jetzt „nur“ noch das System

$$\dot{r} = r(\lambda + a z + b z^2)$$

$$\dot{z} = \mu + c z^2 + d r^2$$

Dort finden wir sofort zwei Gleichgewichte:

$$r = 0 \quad \text{und} \quad z_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{c}}$$

d.h. die Bifurkationslinie ist gegeben durch

$$\{(\mu, \lambda) : \mu = 0\}.$$

und wir haben diese beiden Gleichgewichte

für $\mu < 0$. für $c > 0$!

Wir können noch zwei Gleichgewichte

finden und zwar für

$$0 = \mu + c z^2 + d r^2$$

$$0 = \lambda + a z + b z^2$$

$$\Rightarrow z_{3,4} = -\frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \lambda}$$

↳ Lok. Limit am Verteiler
von $c, d, a, \dots$

↳ 4 Fälle

Davon ist ein Gleichgewicht „recht nahe“ bei $z=0$ (und wahrscheinlich ist es damit auch das interessanteste), das zieht man, wenn man ein wenig umformt:

Hopf - bif
bei $\mu = -\lambda^2$

$$z_{3,4} = \frac{a}{2b} (-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda b^2}{a^2}})$$

$$z_{3,4} = \frac{a}{2b} (-1 \pm 1 - \lambda \frac{4b^2}{2a^2} + \dots) \quad (\text{Taylorreihe})$$

$$\Rightarrow z_3 \approx \lambda \frac{b}{a}$$

$$z_4 \approx \frac{b}{a} (1 + \lambda \frac{b^2}{a^2})$$

Wir betrachten z_3 :

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{-\frac{1}{a}(\mu + c \frac{\lambda^2 b^2}{a^2})}$$

$r=0$ wenn $\mu = -c \frac{\lambda^2 b^2}{a^2}$ ← neue Bifurkationslinie!

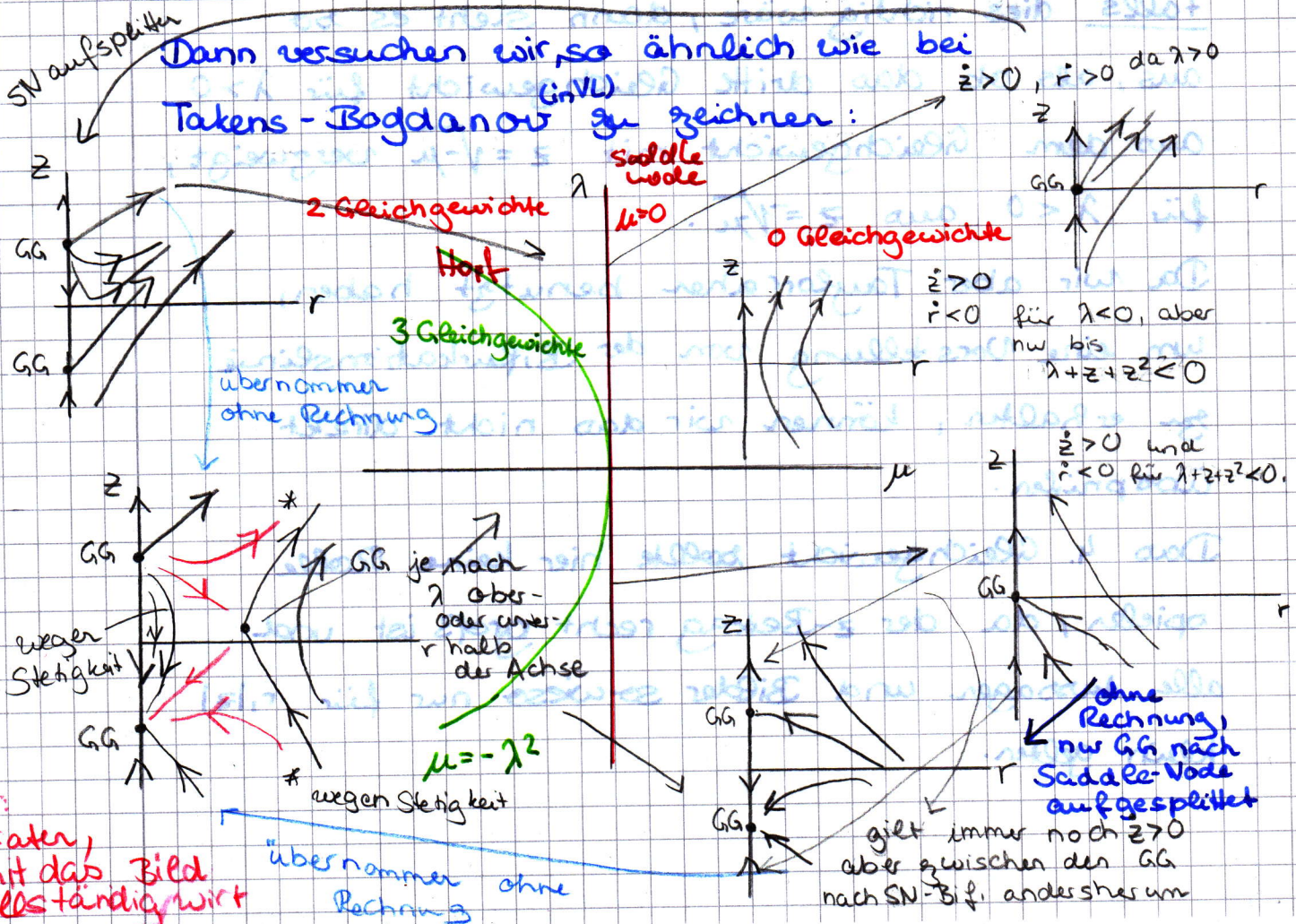
Wir betrachten z_4 :

$$r_4 = \sqrt{-\frac{1}{a}(\mu + \frac{a^2}{b^2}(1 + \lambda \frac{b^2}{a^2})^2)}$$

ergibt ebenfalls eine Bifurkationslinie

Extra (allerdings ohne 4. Gleichgewicht und nur mit Einschränkung:

Sei $a=b=c=d=1 \dots$



Bemerkung:

Wir haben angefangen mit $\mu > 0$. Das kann man ohne Probleme erkennen.

Für $\mu = 0$ haben wir die bekannte Saddle-Node-Verzweigung, also stimmt das Bild für $r = 0$, danach haben wir uns r angeschaut. Soweit sollten die Bilder stimmen!

Schwierig wurde es (für uns) ab $\mu = -\lambda^2$.

Dort kennen wir noch immer $r = 0$, dann

haben wir von „oben“ d.h. $\lambda > 0$ und „unten“

d.h. $\lambda < 0$ die SN-Bilder mit einem „Loch“ in der Mitte zusammengefügt, da sie ja bei $\lambda = 0$ ineinander übergehen müssten.

Die roten Pfeile sind „geraten“, wir haben versucht, das Vektorfeld stetig zu vervollständigen, Falls dies richtig wäre, dann sieht es so

aus, als ob das dritte Gleichgewicht für $\lambda > 0$ aus dem Gleichgewicht mit $z = \sqrt{-\mu}$ verzweigt, für $\lambda < 0$ aus $z = -\sqrt{-\mu}$.

Da wir aber Taylorreihen benutzt haben, um eine Vorstellung von der Bifurkationslinie zu erhalten, können wir das nicht direkt überprüfen.

Das 4. Gleichgewicht sollte hier keine Rolle spielen, da der z -Betrag recht groß ist und alle Aussagen und Bilder sowieso nur für $|r|, |z|$ klein gelten.