

Aufgabe ⑨

$$F: [0,1] \rightarrow [0,1] \quad F(x) = ax(1-x)$$

$1 \leq a \leq 4$, trivialer Fixpunkt $\forall a: x=0$

nicht-trivialer Fixpunkt $x^*(a)$:

$$x = ax(1-x) \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 1-x \quad \Rightarrow x = \frac{a-1}{a} \quad \Rightarrow x^*(a) = \frac{a-1}{a}$$

Die erste Bifurkation entlang $x^*(a)$ ist bei $a^*=3$, denn dort ändert der Fixpunkt seine Stabilität, und es gibt jetzt einen 2-periodischen Orbit mit

$$x_{1/2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2a} \quad a > 3$$

(für $a=3$ ist

$$\frac{a-1}{a} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{a+1}{2a})$$

Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{a-1}{a} \\ x_n &= y_n + \frac{a-1}{a} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda &= a-3 \\ a &= \lambda+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_{n+1} + \frac{a-1}{a}) &= a(y_n + \frac{a-1}{a})(1 - y_n - \frac{a-1}{a}) \\ &= (ay_n + a-1)(1 - y_n - \frac{a-1}{a}) \\ &= ay_n + a-1 - ay_n^2 - ay_n + y_n + y_n - ay_n - a+1 - \frac{a-1}{a} \\ &= -ay_n^2 + 2y_n - ay_n + \frac{a-1}{a} \\ &= -(\lambda+3)y_n^2 + 2y_n - \lambda y_n - 3y_n + \frac{\lambda+2}{\lambda+3} \end{aligned}$$

$$y_{n+1} + \frac{\lambda+2}{\lambda+3} = -(\lambda+3)y_n^2 - (\lambda+1)y_n + \frac{\lambda+2}{\lambda+3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{n+1} = -(\lambda+3)y_n^2 - (\lambda+1)y_n}}$$

$$\Rightarrow G(y) = -(\lambda+3)y^2 - (\lambda+1)y$$

Suche Normalform H zur Ordnung 3:

$$\Phi \circ H = G \circ \Phi$$

$$H = h_1 y + h_2 y^2 + h_3 y^3 + O(y^4)$$

$$\Phi = y + \varphi_2 y^2 + \varphi_3 y^3 + O(y^4)$$

$$\Phi \circ H = h_1 y + h_2 y^2 + h_3 y^3 + \varphi_2 h_1^2 y^2 + 2\varphi_2 h_1 h_2 y^3 + \varphi_3 h_1^3 y^3$$

$$G \circ \Phi = -(\lambda+1)y - (\lambda+1)\varphi_2 y^2 - (\lambda+1)\varphi_3 y^3 - (\lambda+3)y^2 - 2(\lambda+3)\varphi_2 y^3$$

$$\Rightarrow h_1 = -(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow h_2 + \varphi_2(\lambda+1)^2 = -(\lambda+1)\varphi_2 - (\lambda+3)$$

$$\Rightarrow h_2 = 0 \quad \text{für} \quad \varphi_2 = -\frac{\lambda+3}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

$$h_3 + 0 - \varphi_3(\lambda+1)^3 = -(\lambda+1)\varphi_3 + 2\frac{(\lambda+3)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

an der Stelle 0 fällt φ_3 weg.

$\Rightarrow$ wähle z.B. $\varphi_3 = 0$

$\Rightarrow$ Normalform:

$$H(y) = -(\lambda+1)y + 2\frac{(\lambda+3)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} y^3$$

$$2\frac{(\lambda+3)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} = 3 \quad \text{für} \quad \lambda = 9$$

$\Rightarrow$ superkritische Bifurkation.