

Homework assignment

Matthias Babelwitz
Isabella Schneider

Dynamical Systems II

$$\begin{array}{r|rrrr} 13 & 14 & 15 & 16 & \\ \hline 4 & 7 & 1 & 4 & \end{array}$$

Problem 13

Es sei $G(t)$ eine Lösung der DGL

$$\frac{d}{dt} G(t) = g \circ G(t) \quad (*)$$

Definiere $F(t) := G(st)$

$$\text{dann ist } \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} G(st) = (sg \circ G(st))$$

$$= (sg \circ F(t)) = (sg) \circ F(t)$$

d.h. F und G lösen gleiche DGL da $\circ F(t)$ linear

$$\Rightarrow G(st) = F(t) = \exp(sg \cdot t)$$

(denn $\exp(sgt)$ löst die DGL

$$\frac{d}{dt} F(t) = sg \circ F(t) \quad \text{mit } F(0) = E$$

mit Eindeutigkeit der Lösung einer

DGL sind wir fertig, also folgt für

beliebiges t

$$\exp(g \cdot st) = \exp((sg) \cdot t).$$

Zweites Gleichheitszeichen:

$$\text{Sei } h := sg \Rightarrow \exp((sg) \cdot t) = \exp(h \cdot t)$$

Dann können wir das erste Gleichheitszeichen

anwenden und es gilt:

$$\exp((t \cdot h) \cdot 1) = \exp((stg) \cdot 1).$$

Zusammen also:

$$\exp(g \cdot (st)) = \exp((sg) \cdot t) = \exp((stg) \cdot 1)$$

✓