

Annal

Identifiziere einen Taylor Jet $\tilde{f} = T_n f \in \mathcal{O}_x$ mit dem Vektorfeld ^{seiner} Koeffizienten, die in Bezug auf den Grad ihrer Monome geordnet sind. Dann kann jede lineare Abbildung auf $\mathcal{O}_x$ als eine Matrix dargestellt werden.

Z.z.: Die adjungierte Wirkung $\text{ad}(t)$ hat die Form einer Block-Dreiecksmatrix mit Blöcken, die zu den Räumen $H_k(\mathbb{R})$ homogener Polynome gehören.

$$\text{ad}(f)_* = \begin{pmatrix} \text{ad}_1 A & 0 & \cdots & 0 \\ * & \text{ad}_2 A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \text{ad}_{m-1} A \\ * & \cdots & \cdots & \text{ad}_m A \end{pmatrix}$$

$$f = \underbrace{Ax}_{f_1} + \underbrace{f_2 + \dots + f_m}_{\text{Rest}(t)} \quad \begin{matrix} f \in \mathcal{O} \\ g \in \mathcal{O} \end{matrix}$$

$$g = Bx + \underbrace{g_2 + \dots + g_m}_{\Rightarrow: \text{Rest}(g)}$$

Dann ist: $\text{ad}(f)g = \text{ad}(Ax + f_2 + \dots + f_m)(Bx + g_2 + \dots + g_n)(I)$

Gesucht: $\text{ad}(f)g = Cx + h_2 + \dots + h_m \quad \text{ad}(h)g \in \mathfrak{o}_f$

$$C := \text{ad}(A)B + \text{ad}(\text{Res}(f))\text{Res}(g) + \text{ad}(A)\text{Res}(g) + \text{ad}(\text{Res}(f))B, \text{ was aus (I) unmittelbar folgt. (Linearität)}$$

Definiere weiterhin:

$$h_1 := \text{ad}(A)g_2 + \text{ad}(f_2)B$$

$$h_3 := \text{ad}(A)g_3 + \text{ad}(f_3)B + \text{ad}(f_2)g_2$$

$$h_4 := \text{ad}(A)g_4 + \text{ad}(f_4)B + \text{ad}(f_3)g_2 + \text{ad}(f_2)g_3$$

Allgemein:

$$h_i = \sum_{k=1}^i \text{ad}(f_k)g_{k-i+1}$$



Da wir folgende Beziehung haben

$$\text{ad}(f) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} = \text{Mat} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

erhalten für die Matrix Mat folgende

Gestalt:

$$\text{Mat} = \begin{pmatrix} \text{ad}(f_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \text{ad}(f_2) & \text{ad}(f_1) & 0 & \dots & 0 \\ \text{ad}(f_3) & \text{ad}(f_2) & \text{ad}(f_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{ad}(f_m) & \text{ad}(f_{m-1}) & \dots & \dots & \text{ad}(f_1) \end{pmatrix}$$

und somit hat Mat die geforderte Gestalt:

$$\text{ad}(f) = \begin{pmatrix} \text{ad}_1(A) & & & & \\ & \text{ad}_2(A) & & & 0 \\ & & \text{ad}_3(A) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \text{ad}_n(A) \end{pmatrix} \quad \text{g.e.d.}$$

