

Dynamical Systems III

17 18 19 20

2+1 3 4 4

Problem 17

Zuerst stellen wir fest, dass $A(0)$ wie folgt aussieht (in Jordannormalform):

$$A(0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

Die erste Voraussetzung vom Satz von Crandall und Rabinowitz ist erfüllt, da es sich um einen geometrisch einfachen Eigenwert 0 handelt.

Ob die zweite Voraussetzung erfüllt ist hängt von Auffalten der Bifurkation ab!

Es ist aber wohl nicht Sinn dieser Aufgabe, alle möglichen Auffaltungen zu diskutieren, oder?

Damit erhalten wir nur wie üblich zusätzlich zum trivialen Ast Gleichgewichte einen nichttrivialen Ast.

Es fällt auf, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Linearisierung für $\lambda=0$ von der Takens-Bogdanov-Verzweigung entspricht.

Um aber allein schon die Saddle-Node-

Verzweigung zu verstehen, muss man den Satz von Crandall und Rabinowitz um den

Fall erweitern, dass es keinen trivialen Ast

von Gleichgewichten gibt. Das ist in der Vorlesung am Dienstag gesehen und deshalb schreiben wir es hier nicht mehr ab!

Wie sieht die entsprechende Bifurkation aus?

Aha, 3te Voraussetzung über

Die Hopfbifurkation entspricht auch nicht den Voraussetzungen, auch nicht für $\omega \rightarrow 0$, wir erhalten sie also nicht aus dem Satz von Crandall und Rabinowitz.

Wie wir den homoklinen Orbit erkennen sollen, wissen wir auch nicht!

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Die erste Normalformung von Satz 10.1

von Satz 10.1 und Rabinowitz ist erfüllt,

da es sich um einen gewöhnlichen Differentialgleichungssystem handelt.

Eigentlich ist das so.

Ob die zweite Normalformung erfüllt ist,

hängt von den Aufstellungen der Funktionen ab.

Es ist aber nicht sicher, ob diese Aufstellungen

alle möglichen Aufstellungen für die Funktionen, oder

damit erhalten wir nur eine weitere Gleichung

system, welches das Gleichgewichtssystem

darstellt.

Es fällt auf, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Linearisierung

von $\dot{x} = 0$ von der Form $\dot{x} = A(x) x$ ist.

Es gilt:

Um aber sicher zu sein, dass die Gleichung

erfüllt ist, muss man den Satz

von Crandall und Rabinowitz anwenden.

Fall 1: Es gilt, dass es keine weiteren

von Gleichgewichten gibt. Dann ist die

Linearisierung von $\dot{x} = 0$ gegeben durch

Es gilt also, dass es keine weiteren

17

$$\dot{x} = f(\lambda, x) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\lambda, 0) = 0 \quad f \in C^2$$

$$A(\lambda) = D_x f(\lambda, 0) \quad \text{in } \lambda = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu & 1 \\ \hline 0 & \mu \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

 $\Rightarrow$
Fall $N=2$:

$$\Rightarrow A(0) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \ker A(0) = 1 \quad \text{codim Im } A(0) = 1 \Rightarrow i=0$$

$$D_x D_x f(0,0) \big|_{\ker L} \text{ kann irgendwas } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_2 \neq 0 \text{ sein}$$

Wenn also der Parameter

auch etwas entfaltet folgt eine Verzweigung in $(\lambda, 0)$

und $(\lambda(s), x(s)) \quad s \in \mathbb{R} \quad \lambda(s), x(s) \in C^1 \quad \text{mit}$

$$\lambda(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) \neq 0$$

Bogdanov-Takens braucht aber 2 Parameter zum entfalten

Für $N \geq 2$ wird $\dim \ker D_x f(0,0) = 1$ entweder wieder

durch $\mu=0$ oder im "*" - Teil erzeugt

$\Rightarrow \underline{\mu=0}$ wie $N=2$ hat mit ein paar Dimensionen dazu

$\underline{\mu \neq 0}$ Irgendwas (?)

$$L := D_x f(0,0): X \rightarrow Y$$

Theorem: $\forall f$ mit $\forall \lambda, f(\lambda, 0) = 0$
(kurz)

$$\dim \ker D_x f(0,0) = 1 \quad f(0,0) = 0$$

$$D_x D_x f(0,0) \big|_{\ker L} \quad f'(0,0) = 0$$

Rang L

$$\Rightarrow (\lambda, 0) \text{ und } (\lambda(s), x(s)) \quad \lambda(0) = 0 \quad x(0) = 0$$

zweigt



$$\dot{x}(0) \neq 0$$

Wie lautet die Entfaltungsbedingung?