

Problem 18

ii) a) $P^3 = P(P^2) = P^2 = P \Rightarrow$ richtig

b) Sei $P = \text{id} \Rightarrow Q = 0$ und $0 \neq \text{id}$ (a) $\Rightarrow$ falsch.

c) Sei $P = 0 \stackrel{ca)}{\Rightarrow} 0 \neq \text{id} \Rightarrow$ falsch.

d) $Q^2 = (\text{id} - P)Q = Q - PQ = Q$ ✓

$Q \neq P$ für z.B. $P = \text{id} \Rightarrow$ falsch

e) d) $\Rightarrow$ e ist richtig

f) Sei $P = \text{id} \Rightarrow Q^2 = 0 \neq \text{id} \Rightarrow$ falsch

g) h) i) $[P, Q] = PQ - QP = 0 \quad (\forall P, Q)$ ✓

d.h. g ist falsch für z.B. $P = \text{id}$

h ist falsch für z.B. $P = 0$

i ist auf jeden Fall falsch, da $\text{id} \neq 0$

j) k) l) $(\text{id} - 2P)(\text{id} - 2P) = \text{id} - 4P + 4P^2 = \text{id}$ ✓

$\Rightarrow$ l ist richtig

$\Rightarrow$ j ist falsch für z.B. $P = 0$

$\Rightarrow$ k ist falsch für z.B. $P = \text{id}$

m) da $PQ = 0 \quad (\forall P, Q)$ bleibt nur übrig

$\binom{0}{0} P^0 Q^n = Q. \Rightarrow$ richtig ✓

n) analog folgt

$2^0 \binom{0}{0} P^0 Q^n = Q$ ✓

$\Rightarrow$ falsch denn für z.B. $P = \text{id}$ ist $Q \neq P$.

ii) b) $\rightarrow$ a, Existenz:

Wähle z.B. für die Projektion

$P: X \rightarrow X$

$X_1 \ni x \mapsto 0$

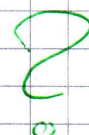
$X_2 \ni x \mapsto x$

alle Voraussetzungen werden erfüllt.

Stabilität von P ?

Wie geht die Abgeschlossenheit von X_1, X_2 ein?

Linear Abbildung?
Projektion?



a) $\Rightarrow$ b)

abgeschlossen: Wähle Cauchyfolge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

wobei alle $x_n \in X_1$

$\Rightarrow P(x_n) = 0 \quad \forall n$. wegen ^{Stetigkeit} Linearität folgt

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X_1$$

Wähle Cauchyfolge $\{P(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Alle $P(x_n)$

sind $\in X_2$.

x_n Cauchyfolge $\rightarrow P(x_n)$ Cauchyfolge

Für $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} P(P(x_n)) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) \in X_2$. ^{da $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$ und $\forall x$}

Für $P(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_*) = x_*$
 $\in X_2$.

$\Rightarrow$ beide Räume sind vollständig

Die Räume haben 0 als einziges gemeinsames

Element:

Sei $x \in X_1$. Angenommen $x \in X_2$.

Dann existiert $y \in X$, sodass $x = P(y)$.

$\Rightarrow P(x) = x$ (da $P^2 = P$) $\Downarrow$ zu $x \in X_1$.

Sei $x \in X_2$. Angenommen $x \in X_1$.

$\Rightarrow P(x) = 0$ $\Downarrow$ zu $P^2 = P$.

$X = X_1 + X_2$, $P(x) = x_1$. Zeige $\text{graph}(P)$ abg.

Sei $x \in X$, $x_n \xrightarrow{x} x$, $P(x_n) = y_n \in \text{Bild } P$, $y_n \rightarrow y \in \text{Bild } P$ abg. $\Rightarrow P(y) = y$

Zeige $P(x) = y$ dann fertig mit closed graph theorem

$(x_n - P x_n) = (Id - P) x_n \in \text{Kern } P$ abg.

$$\parallel$$

$$x_n - y_n$$

$$x - y \in \text{Ker } P \quad \Rightarrow \quad 0 = P(x - y) = P(x) - P(y) = P(x) - y$$

Wieso existiert x_* ?
 $\uparrow$ A. ex,
 x_* nicht,
da X
nicht
kompakt