

### Problem 19

Für  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  sind alle linearen Operatoren  $L$  beschränkt und kompakt (dies ist sofort klar, da es sich um endlichdimensionale Räume handelt und also das Bild der Einheitskugel sicher beschränkt ist, und damit ist der Abschluss kompakt).

Die Eigenschaften von einem Fredholmoperator sind ebenfalls trivial erfüllt.

Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

Sei  $L: X \rightarrow Y$  Fredholmoperator und  $K: X \rightarrow Y$  ein kompakter Operator.

$\Rightarrow L + K$  ist Fredholmoperator.

und  $\text{ind}(L + K) = \text{ind}(L)$ .

Daraus folgt für  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$

$\text{ind}(L) = \text{ind}(0) = m - n$ .  
 $n - n$  ?  
dim Ker - codim Range

Für den unendlichdimensionalen Fall betrachten wir ebenfalls diesen Satz.

Sei  $L: X \rightarrow Y$  ein kompakter Fredholmoperator,  $X$  und  $Y$  <sup>oder</sup> unendlichdimensional.

Dann gilt  $-L$  ist ebenfalls ein kompakter Fredholmoperator und nach obigem Satz ist  $L - L$  ebenfalls Fredholm.

$\Rightarrow \text{Ker } L = X$  unendlichdimensional  
und  $(\text{Range } L)^\perp = Y$  unendlichdimensional  
oder

zur Annahme  
 $L$  wäre Fredholm

$\Rightarrow$  Für unendlichdimensionale  $X, Y$  kann es keinen kompakten Fredholmoperator geben.

Daraus folgt, dass es nur für endlichdimensionale

$X, Y$  kompakte Fredholmoperatoren<sup>L</sup> geben

kann mit

$$\text{ind}(L) = \text{ind}(0) = \dim X - \dim Y.$$

hier ist  $\dim Y$  endlich