

Problem 20

Wir betrachten das Inverse der Ableitung

$$\left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} f \right)(x) := \int_0^x f(\xi) d\xi$$

als Abbildung von

$$i) BC^0([0,1]) \rightarrow BC^0([0,1]).$$

Diese Abbildung ist weder Fredholm noch Quasi-Fredholm. Wir scheitern hier daran, dass

$$\text{Range } \mathcal{L} = \{ f \in BC^0([0,1]) \mid f(0) = 0 \text{ und } f \in BC^1([0,1]) \}$$

nicht abgeschlossen ist in $BC^0([0,1])$!

evtl. Gegenbeispiel angeben!

ii) Linearität OK

← endlichdimensional

ist die Null!

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \{ f = 0 \text{ auf } [0,1] \}$$

abgeschlossen

und (Ker L)^c abgeschlossen

$$\text{Range } \mathcal{L} = \{ f \in BC^1([0,1]) \mid f(0) = 0 \}$$

Diesmal haben wir Abgeschlossenheit, da

die f sowieso nur auf $BC^1([0,1])$ betrachtet

werden, $(\text{Range } \mathcal{L})^c = \langle 1 \rangle$ ist ebenfalls abgeschlossen.

$\Rightarrow \mathcal{L}$ ist quasi-Fredholm.

Und $\mathcal{L}$ ist auch Fredholm, da

$(\text{Range } \mathcal{L})^c = \langle 1 \rangle$ und $\text{Ker } \mathcal{L}$ endlichdimensional sind!

Fredholm index: $\text{ind } \mathcal{L} = 0 - 1 = -1$

also, also doch

iii) Quasi-Fredholm-Argumente analog zu ii)
mit $(\text{Range } \mathcal{L})^c = \{0\}$.

Es gilt hier sogar $\mathcal{L}$ ist Fredholm,

da $\dim \text{Ker } \mathcal{L} = 0$

?

und $\dim (\text{Range } \mathcal{L})^c = 0$

} endlich

$\Rightarrow$ Fredholm index:

$$\text{ind}(\mathcal{L}) = 0 - 0 = 0.$$

