

Homework assignment

Matthias Rosewitz
Isabelle Schneider

Dynamical Systems III

4/4

Problem 21

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t k(t,s)x(s)ds}_{(Kx)(t)} + f(t), \quad x(0) = 0$$

mit $(id \cdot x)(t)$

$$k \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$$

$$f \in C_0([0,1], \mathbb{R}) := C([0,1], \mathbb{R}) \cap \{x \mid x(0) = 0\}$$

umschreiben zu

$$\underbrace{(id - K)}_{\mathcal{L}} x = g$$

Die Linearität von $\mathcal{L}$ ist klar. $\mathcal{L}$ ist in der Tat $\mathcal{L}: C_0 \rightarrow C_0$

Als erstes sollten wir zeigen, dass K

kompakt ist, denn dann gilt

$$\text{ind}(id - K) = \text{ind}(id) = 0.$$

Dass K ein kompakter Operator ist,

zeigen wir mit Hilfe des Satzes von

Arzela & Ascoli.

Zuerst zeigen wir, dass das Bild der

Einheitskugel beschränkt ist.

$$\|K\|_{\infty} \stackrel{\text{Def. Norm}}{=} \sup_{\|x\|_{\infty} \leq 1} \sup_{t \in [0,1]} |(Kx)(t)|$$

$$\stackrel{\text{Def. } K}{=} \sup_{\|x\|_{\infty} \leq 1} \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 k(t,s)x(s)ds \right|$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t,s)| ds$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \|k\|_{\infty}$$

$\leq$ da $\sup$ (von ganz k)
nicht auf $[0,1]$ angenommen
werden muss!

(fazit)

Als nächstes zeigen wir die gleichgradige Stetigkeit, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ soll gelten:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)\| < \varepsilon$$

Hier können wir ausnutzen, dass k auf $[0,1]^2$ sogar gleichmäßig stetig ist, denn so gilt nämlich

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sodass } |k(t_1, s) - k(t_2, s)| < \varepsilon$$

$\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$.

Jetzt gilt nämlich $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$:

$$\|(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)\| = \left\| \int_0^1 (k(t_1, s) - k(t_2, s)) x(s) ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| |x(s)| ds$$

$$< \varepsilon \int_0^1 |x(s)| ds$$

$$\leq \varepsilon \|x\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)\| < \varepsilon \text{ wenn } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Wir müssen noch die Injektivität des Operators zeigen, d.h. $(f=0)$ hat nur den trivialen Kern $x=0$.

Dann sind wir mit der Fredholm-Alternative (aus VL) fertig.

Gesucht ist die Lösung von

$$x(t) = \int_0^t k(t, s) x(s) ds \quad t \in [0,1] \text{ bel.}$$

$$|x(t)| \leq t \|k\|_\infty \|x\|_\infty \text{ (abschätzen, jetzt für alle } x \text{)}$$

analog zu (*)

$$\Rightarrow |x(t)| \leq \int_0^t k(t, s) \|k\|_\infty \|x\|_\infty ds$$

aber $\|x\|_\infty$ nicht unbedingt 1!

$$\leq \frac{t^2}{2} \|k\|_\infty^2 \|x\|_\infty$$

$$\text{Induktiv folgt } |x(t)| \leq \frac{t^n}{2} \|k\|_\infty^2 \|x\|_\infty \quad \forall n$$

$\rightarrow |x(t)|$ ist durch 0 nach oben (und unten)

beschränkt $\Rightarrow x(t) = 0. \Rightarrow x=0$ ist

der triviale Kern.

Fertig.

Beste: Haeuwall!