

3/4

Problem 22

Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus dem Satz von Crandall & Rabinowitz stellen wir für eine transkritische Bifurkation noch die Bedingung

$$D_x^2 f(0,0)|_{\ker L} \neq 0. \quad (*) \text{ siehe nächste Seite!}$$

Aus dem Beweis aus der Vorlesung vom Satz von Crandall und Rabinowitz kennen wir die passende LS-Reduktion:

Mit der Notation aus der Vorlesung ist

$$W := \mathbb{R} \times X, \quad Z := Y$$

$$F(w) := f(\lambda, x)$$

$$L = F'(0) = \begin{pmatrix} D_\lambda f & D_x f \end{pmatrix}|_{\lambda=0, x=0} \quad \text{Fredholm}$$

$$\text{mit } F(\lambda, x) = 0 \iff (*)$$

$$x = \xi \oplus V(\lambda, \xi) \quad \text{UND}$$

$$\Phi(\lambda, \xi) = Q f(\lambda, \xi + V(\lambda, \xi)) = 0$$

Außerdem wissen wir

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \xi) &= \left(\int_0^1 D_2 \Phi(\lambda, v\xi) dv \right) \cdot \xi \\ &= \varphi(\lambda, \xi) \cdot \xi. \end{aligned}$$

und wir wissen ebenfalls, dass es eine

nichttriviale Kurve $(\lambda(s), x(s))$ gibt (nahe $\lambda=0$)
 $(\lambda(0)=0, x(0)=0, \dot{x}(0) \neq 0)$

$$\text{mit } f(\lambda(s), x(s)) = 0$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \Phi(\lambda(s), x(s)) = 0 \quad \text{nahe } \lambda=0$$

$$\stackrel{\xi \neq 0}{\Rightarrow} \varphi(\lambda(s), x(s)) = 0 \quad \text{nahe } \lambda=0.$$

Wenn wir die letzte Gleichung differenzieren erhalten wir

$$D_1 \varphi(\lambda(s), x(s)) \dot{\lambda}(s) + D_2 \varphi(\lambda(s), x(s)) \dot{x}(s) = 0$$

Durch umstellen nach $\dot{\lambda}$ und einsetzen $s=0$ erhalten wir:

$$\dot{\lambda}(0) = - \frac{D_x \varphi(0,0)}{D_{\lambda} \varphi(0,0)} \dot{x}(0). \text{ Dies soll ungleich 0 sein!}$$

$\dot{x}(0) \neq 0$ folgt aus dem Satz von Crandall und Rabinowitz, $D_{\lambda} \varphi(0,0) \neq 0$ zu zeigen war Teil (4) des Beweises.

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \neq D_x \varphi(0,0) &= D_x D_{\underline{s}}|_{\underline{s}=0} \Phi(\lambda, \underline{s}) \\ &= D_x D_{\underline{s}} Q \tilde{f}(0) \\ &= D_x D_{\underline{s}} Q f(0,0) \\ &= Q D_x^2 f(0,0)|_{\text{Ker } L} \neq 0 \end{aligned}$$

und das war die Voraussetzung (denn Q bildet $\text{Rang } L$ auf 0 ab, aber nicht $\text{Ker } L$).

(also $D_x^2 f(0,0)|_{\text{Ker } L} \notin \text{Bild } L$ wahr, ?!)

⊗ Bei einer transkritischen Verzweigung ist $\dot{\lambda} \neq 0$ (denn sonst handelt es sich um eine Pitchfork-Verzweigung). Also ist es Ziel zu zeigen, dass aus der Voraussetzung $\dot{\lambda} \neq 0$ folgt!

