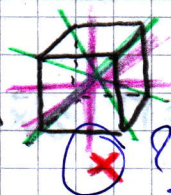


26

Γ Automorphismen von



oder



$\cong: X$

$\mathbb{R}^3$

$\Gamma = SO(3)$

oder

$\tilde{\Gamma} = O(3)$

$SO(3) + \Delta$

(i) Die Symmetrie des Oktaeders legt nahe:

ii) Mögliche Drehachsen:

durch gegenüberliegende Eckpunkte (3) oder Flächenmittelpunkte

Kantenmittelpunkte?

► Nur Eckpunkte interessant, da sonst alles in konvexer Hülle der Eckpunkte.

► Drehung möglich um

$n \cdot 90^\circ$ für A_x, A_y, A_z und

$m \cdot 60^\circ$ für $B_1, \dots, B_6$

da sonst Randpunkte

180° um Kantenmittelpunkte?

nicht wieder in X landen.

► Wenn 2 Ecken stimmen, dann

auch ganz X

$\Rightarrow \gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Gamma = \left\{ \prod_{i=1}^N R_i \mid N \in \mathbb{N}, R_i \in \{\gamma_x, \gamma_z\} \right\}$

$\left[\gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

$\cong \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^3$

die anderen Symmetrien sind nur Produkte davon (nicht kommutativ!)

Sind es?
Es sollte sein $6 \cdot 4 = 24 = |\Gamma|$

(ii) Irreduzibel: Angenommen

$\exists U$ mit $0 \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$ und $\rho(A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq U$ (sonst Rotiert vorher)

$\gamma_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq U$ $\hat{=}$ y-Achse

$\gamma_2 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq U$ $\hat{=}$ z-Achse

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \supseteq U \supseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3$

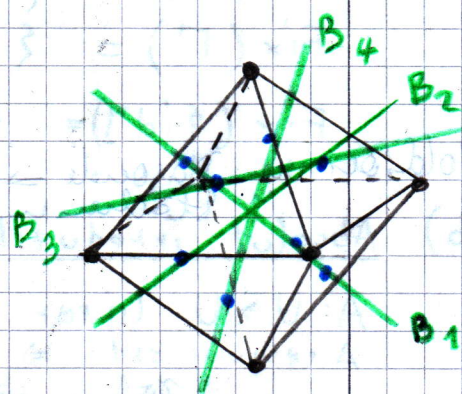
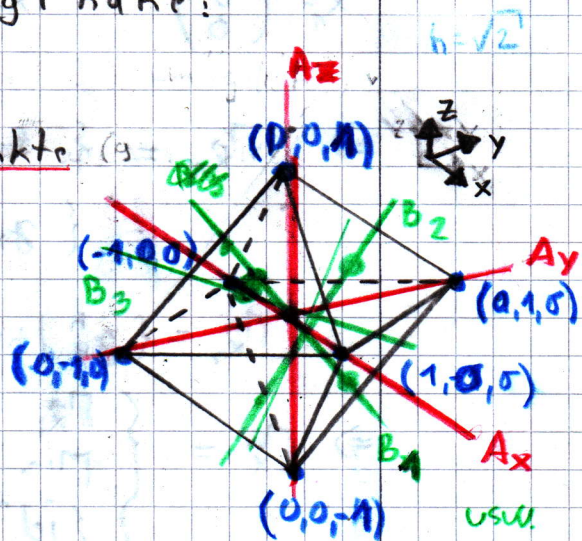
Anm.: A Füge $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

zu den möglichen R_i hinzu und man hat $O(3)$

$\Rightarrow 48 = |\Gamma|$

da gegenüberliegende klar und Orientierung erhalten $\Rightarrow$ 3te klar $\Rightarrow$ alle 6 klar

$\Rightarrow 24$ Symmetrien



$$(iii) \Gamma_{\vec{x}} := \{ g \in \Gamma \mid g\vec{x} = \vec{x} \}$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\vec{x}} = \{ \text{Oktaedersymmetrien } g \mid g\vec{x} = \vec{x} \}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis des $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \Gamma_{\vec{x}_1} = \{ \text{Rotationen um } x\text{-Achse} \}$$

$$= \{ g_x^h \mid h=1, \dots, 4 \}$$

$$(g_x^4 = \text{id})$$

$$\Gamma_{\vec{x}_1} = \{ g_x^h \mid h=1, \dots, 4 \}, \quad \Gamma_{\vec{x}_2} = \{ g_x^h \mid h=1, \dots, 4 \}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\vec{x}} = \begin{cases} \Gamma_{\vec{x}_i} & \text{für } \vec{x} = c\vec{x}_i \\ \{ \text{id} \} & \text{sonst} \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Fix}(K) := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid g x = x \quad \forall g \in K \}$$

$$\text{Fix}(\Gamma_{\vec{x}_i}) = \{ c\vec{x}_i \mid c \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Fix}(\Gamma) = \{ 0 \}$$

$$\text{Fix}(\{ \text{id} \}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = c\vec{x}; \quad \forall c \in \mathbb{R}, i=1, \dots, 3 \}$$

Rotation um Diagonale $\Rightarrow$ Fixgerade bzw. Fixebene
 " Flächennulle $\Rightarrow$ Fixpunkt
 (iib) Absolut irreduzibel: $\Rightarrow$ Fixpunkt $\Rightarrow$ Fixebene $\Rightarrow$ Fixgerade $\Rightarrow$ Fixpunkt

$A: U \rightarrow U$ linear $\Rightarrow$ A Matrix

A equivariant $\Rightarrow A g = g A$

$\forall g \Leftrightarrow A, g_x$ und A, g_z kommutieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = -g = 0 \\ f = -h = 0 \\ e = i \end{cases}, c = b = 0$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma - e & -f \\ d & \sigma & 0 \\ \sigma - f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma - a & -f \\ -e & 0 & 0 \\ -f & 0 & c \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

$$\begin{cases} f = 0 \\ a = e = i \end{cases} \Rightarrow A = \lambda \text{id} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Symmetrie bildet

Ecken auf Ecken und

Seitenmittelpunkte auf S. Mittelpunkte ab!

Okt. Hex.

Ecken $\leftrightarrow$ Flächenmittelpunkte

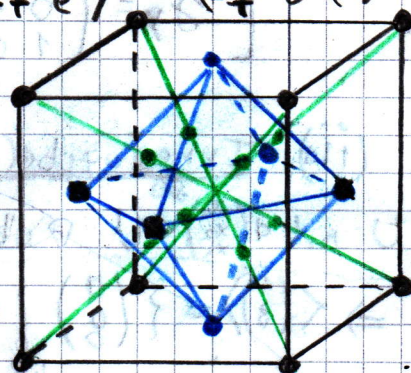
Flächenmittelpunkte $\leftrightarrow$ Ecken

Würfel

ist (bzgl.)

Symmetrien

das selbe wie ein Oktaeder



Oktaeders. mittelpunkte

Würfel. mittelpunkte & Oktaeder ecken