

Dynamical Systems II

Problem 29

i) Wir gehen so vor wie in der Vorlesung:

$$\begin{aligned} (\gamma \Delta)(x) &= \Delta u(\gamma^{-1}x) \quad (\text{so operiert } \gamma!) \\ &= \text{trace}(D^2 u(\gamma^{-1}x)) \quad (\text{Def. von } \Delta) \end{aligned}$$

andererseits gilt:

$$\begin{aligned} (\Delta(\gamma u))(x) &= \Delta_x u(\gamma^{-1}x) \quad (\text{so operiert } \gamma!) \\ &= \text{trace}((\gamma^{-1})^T D^2 u(\gamma^{-1}x) (\gamma^{-1})) \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \text{trace}(D^2 u(\gamma^{-1}x)) \quad (\text{Invarianz der Spur da } \gamma \in O(n)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Spur } AB &= \text{Spur } BA \\ (\gamma^{-1})^T \gamma^{-1} &= \text{Id} \end{aligned}$$

ii) Fast analog gilt:

$$\begin{aligned} (\gamma L u)(x) &= L u(\gamma^{-1}x) \quad (\text{so operiert } \gamma) \\ &= \det(D^2 u(\gamma^{-1}x)) \quad (\text{Def. von } L) \end{aligned}$$

andererseits gilt:

$$\begin{aligned} (L \gamma u)(x) &= \det((\gamma^{-1})^T D^2 u(\gamma^{-1}x) (\gamma^{-1})) \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \det(D^2 u(\gamma^{-1}x)) \quad (\text{Invarianz der Determinante da } \gamma \in SL(n, \mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det AB &= \det A \det B \\ \det \gamma &= \det \gamma^{-1} = 1 \end{aligned}$$

⊗ fließt ist $\left(\frac{d}{ds}\right)^2 u(\gamma^{-1}(x))$
als tot. Abf. $i \in \mathbb{R}^3$