

Problem (30)

Wir beginnen mit der Stetigkeit.

Dazu erinnern wir uns an folgendes

Lemma aus Analysis II:

Sei $L: X \rightarrow Y$ linear, X, Y normierte Vektorräume.

Dann gilt: L stetig $\Leftrightarrow L$ beschränkt.

Hier $L \triangleq \Pi$, $X = Y = H$.

$\Rightarrow$ zeige Beschränktheit.

Es gilt $\forall u \in H$: $\langle \Pi u, (1 - \Pi)u \rangle_H = 0$

$$\Rightarrow \langle \Pi u, u \rangle_H = \langle \Pi u, \Pi u \rangle_H$$

$$\Rightarrow \|\Pi u\| \|u\| \geq |\langle \Pi u, u \rangle| = \|\Pi u\|^2$$

$$\Rightarrow \|u\| \geq \|\Pi u\|$$

$$\text{oder } \|u\|^2 = \|\Pi u\|^2 + \|(1 - \Pi)u\|^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$\Rightarrow \Pi$ beschränkt

$\Rightarrow \Pi$ stetig

Als nächstes zeigen wir, dass das orthogonale Komplement zu V ebenfalls Γ -invariant ist:

$$V^\perp = \{w \in H : (w, v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

Sei jetzt $w \in V^\perp$, $v \in V$, $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt

$$(\gamma w, v) = (w, \gamma^{-1} v) \quad (\text{Invarianz des Skalarproduktes})$$

$$= (w, \tilde{v}) \quad \text{mit } \tilde{v} \in V$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \gamma w \in V^\perp.$$

Da w, v, γ beliebig waren, folgt daraus die Invarianz von $V^\perp$.

Sei $u = v \oplus w$ mit $u \in H$, $v \in V$, $w \in V^\perp$

$$\Rightarrow \gamma u = \gamma v \oplus \gamma w \quad [\gamma \text{ linear!}]$$

$$\Rightarrow \Pi \gamma u = \gamma v = \gamma \Pi u.$$

$\Rightarrow \Pi$ ist Γ -equivariant.