

Problem (32)

$$V_\ell = \{h \in H_\ell(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \Delta h = 0\}$$

i) Surjektivität von $\Delta: H_\ell \rightarrow H_{\ell-2}$ ist klar,

denn zu jedem $h \in H_{\ell-2}$ lässt sich

$p \in H_\ell$ finden mit $\Delta p = h$ (sind ja nur Polynome)

V_ℓ hat Dimension $(2\ell+1)$:

$p \in H_\ell$ hat $\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$ Koeffizienten.

ist Surjektivität
wirklich so
einfach?

$\Delta p = h$ ist $\in H_{\ell-2}$ und hat $\frac{(\ell-1)\ell}{2}$ Koeffizienten,

$\Rightarrow p \in H_\ell$ mit $\Delta p = h$ hat

$$\begin{aligned} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} - \frac{(\ell-1)\ell}{2} &= \frac{\ell^2 + 3\ell + 2 - \ell^2 + \ell}{2} \\ &= \frac{4\ell + 2}{2} = 2\ell + 1 \end{aligned}$$

freie Koeffizienten übrig.

$\Rightarrow V_\ell$ hat Dimension $2\ell+1$.

ii) Alle $\rho(\gamma)$ sind beschränkt, linear, OK.

$\rho(\text{id}) = \text{id}$ OK

Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} [\rho(\gamma_1 \cdot \gamma_2)h](x) &= h((\gamma_1 \cdot \gamma_2)^{-1}x) \\ &= h(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= [\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)h](x). \end{aligned}$$

und tatsächlich $\rho: V_\ell \rightarrow V_\ell$, vgl. 29

iii) Zuerst halten wir einige Tatsachen

über Legendre-Polynome fest, wie

wir sie aus der Physik kennen:

Das ℓ -te Legendre-Polynom

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left((z^2 - 1) \frac{d}{dz} P_\ell(z) \right) - \ell(\ell+1) P_\ell(z) = 0$$

(ohne Beweis für heute!)

Ebenso kann man dies auch für $P_m(z)$ durchführen und dann erhalten wir folgende Differentialgleichung

$$(*) \quad \frac{d}{dz}((1-z^2) \frac{d}{dz} \overbrace{P_m(z)}^{=: x(z)}) - \left(\frac{m^2}{1-z^2} - \ell(\ell+1) \right) \overbrace{P_m(z)}^{=: x(z)} = 0$$

d.h. wir müssten jetzt nur noch zeigen dass alle Funktionen in V_ℓ genau diejenigen sind die die DGL

$$\frac{d}{dz}((1-z^2) \frac{d}{dz} x(z)) - \left(\frac{m^2}{1-z^2} - \ell(\ell+1) \right) x(z) = 0$$

erfüllen und dann wären wir fertig...

Wir wollen alle Lösungen der Gleichung

$$\Delta h = 0 \text{ finden. } h \in H_\ell.$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\Delta Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}$$

$\Rightarrow$ in Physik haben wir gelernt, dass wir daraus eine neue Differentialgleichung aufstellen können, in unserem Fall erhalten wir

$$\Delta h + \ell(\ell+1)h = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} h) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} h) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} h \right) + \ell(\ell+1)h = 0$$

Wir machen jetzt den Ansatz

$$h = Y(\theta, \varphi) p(r)$$

Daraus erhalten wir dann:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} p(r) \right) \right) Y(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) \cdot p(r) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) \cdot p(r) + \ell(\ell+1) Y(\theta, \varphi) p(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 \frac{\partial}{\partial r} p(r) + \ell(\ell+1) r^2 p(r)}{p(r)} = - \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) \right) = \text{Konstante} = -k$$

⇒ Wir suchen jetzt "nur" noch nach Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) \right) + k Y(\theta, \varphi) = 0.$$

Wieder machen wir einen Ansatz, diesmal $Y(\theta, \varphi) = f(\theta) g(\varphi)$.

Außerdem setzen wir $k = \ell(\ell+1)$, da wir wissen dass $-\Delta Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}$ auf der Kugelfläche gilt.

Einsetzen:

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \right) \right) g(\varphi) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g(\varphi) \cdot f(\theta) + \ell(\ell+1) f(\theta) g(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g(\varphi)}{g(\varphi)} = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \right) \cdot \sin \theta}{f(\theta)} - \ell(\ell+1) \sin^2 \theta = \tilde{k}$$

↑ Konstante

⇒ Wir erhalten jetzt für f die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \right) + (\ell(\ell+1) \sin \theta - \frac{\tilde{k}}{\sin \theta}) f(\theta) = 0$$

Jetzt setzen wir noch $z = \cos \theta$ und erhalten dann endlich etwas, das wir kennen:

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d}{dz} f \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\tilde{k}}{1-z^2} \right) f = 0$$

Für $\tilde{k} = m^2$ erhalten wir nämlich als Lösung die Legendre-Polynome

$$P_m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_e(z).$$

Für g erhalten wir damit die DGL:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g(\varphi) + m^2 g(\varphi) = 0$$

mit Lösung $a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi$.

Da wir $Y(\theta, \varphi) = f(\theta)g(\varphi)$ gesetzt hatten erhalten wir

$$Y(\theta, \varphi) = (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_m(\cos \theta).$$

Und daraus folgt dann die Behauptung der Aufgabe.

(dass wir alles haben sehen wir daran, dass wir genau $2n+1$ linear unabhängige Summanden haben) ($m=0, \dots, n$ und $\sin \theta \varphi = 0$

i) Surjektivität $\Rightarrow 2(n+1) - 1 = 2n+1$.

$$\Delta x^k y^l (z^m) = k(k-1)x^{k-2}y^l z^m + l(l-1)x^k y^{l-2} z^m + m(m-1)x^k y^l z^{m-2}$$

$\bullet k \geq 2$

$k \geq 1$

alle einzelnen Monome liegen im Bild

J.A. $\begin{matrix} l=0 \\ l=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x^k \text{ liegt im Bild} \\ x^k y^l \text{ ok} \end{matrix}$

J.S $\Rightarrow l-2 \rightarrow l$ für 2 Variablen

danach noch mal alles über m

$k, l, m \geq \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m}$ $k+l+m = \text{fix}$

falls $k > \tilde{k}$ oder $k = \tilde{k}, l > \tilde{l}$

oder WOP

k, l so klein wie möglich