

(37)

3/4

$$\ddot{\theta} = \Omega \sin(2\theta) - \sin(\theta) - v \dot{\theta}$$

↑ Winkelgeschwindigkeit

↑ Winkel Arm

↑ Reibung

(eine Lösung für $v=0$: $\theta \equiv \dot{\theta} \equiv \ddot{\theta} \equiv 0 \Rightarrow$ Betrachte $\theta = \dot{\theta} = 0$)Hopf:

$$\dot{x}_1 = \Omega \sin(2x_2) - \sin(x_2) - v x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$x_1 = \dot{\theta}$$

$$x_2 = \theta$$

Linearisation:

$$A(v) = \begin{pmatrix} -v & 2\Omega - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bei $(x_1, x_2) = (0, 0)$

(i) Im EW: $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\Omega - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda^2 - (2\Omega - 1) = 0$

also EW: $\pm \lambda = \pm \sqrt{2\Omega - 1} \Rightarrow \Omega < \frac{1}{2} \Rightarrow$ rein
imaginäre
EWerte ✓

$\Omega \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ kein Hopf! ✗

(ii) Nonresonanz: klar da nur $\pm \lambda = \pm \lambda(0)$ als EW ✓

(iii) Transversalität:

$$\frac{d}{dv} \Big|_{v=0} \operatorname{Re} \lambda(v)$$

$$\lambda(v): (-v - \lambda)(-\lambda) - (2\Omega - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + v\lambda - (2\Omega - 1) = 0$$

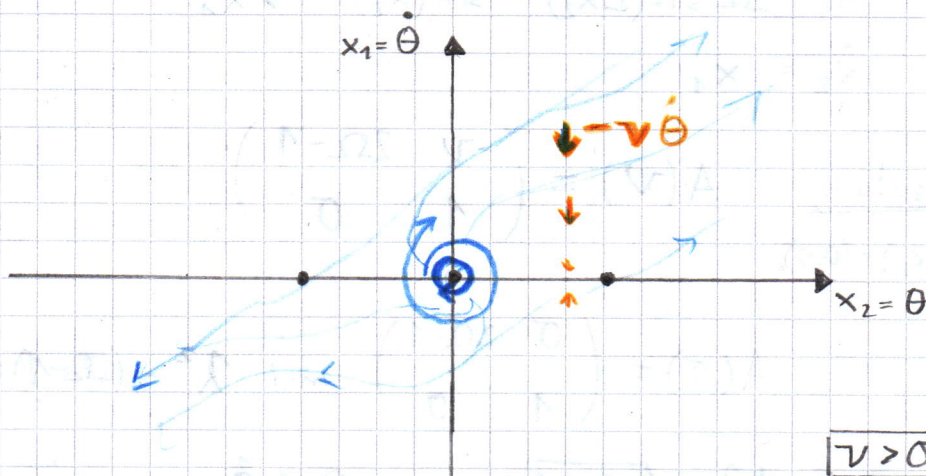
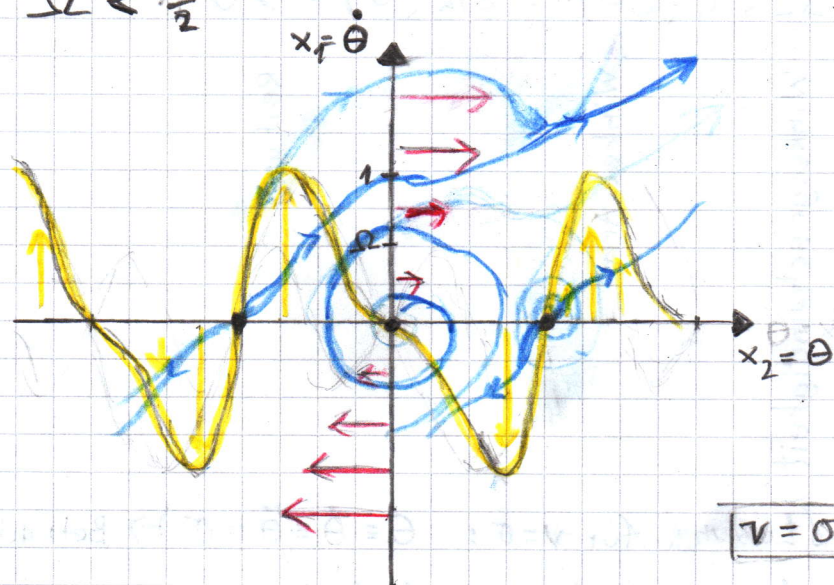
$$\Rightarrow \lambda_{\pm}(v) = -\frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + 2\Omega - 1}$$

$\Omega < \frac{1}{2}$ (sonst ist eh (i) nicht erfüllt) $\Rightarrow \frac{v^2}{4} + 2\Omega - 1 < 0$
(für v klein genug)

$$\Rightarrow \frac{d}{dv} \Big|_{v=0} \left(-\frac{v}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

✓

⇒ Hier haben wir eine Hopf-Verzweigung
für $\Omega < \frac{1}{2}$



→ instabile periodische Orbits zweigen ab vom Gleichgewicht in
↑ $\dot{\theta} = \theta = 0$

Anschauung

sub- or supercritical?

Dampfmaschine hat Reibung ⇒ bei kleinen Geschwindigkeiten
 Ω "schwingt" θ , sodass der Dampfdruck schwangert (was eigent-
lich zu verändertem Ω führen würde)

