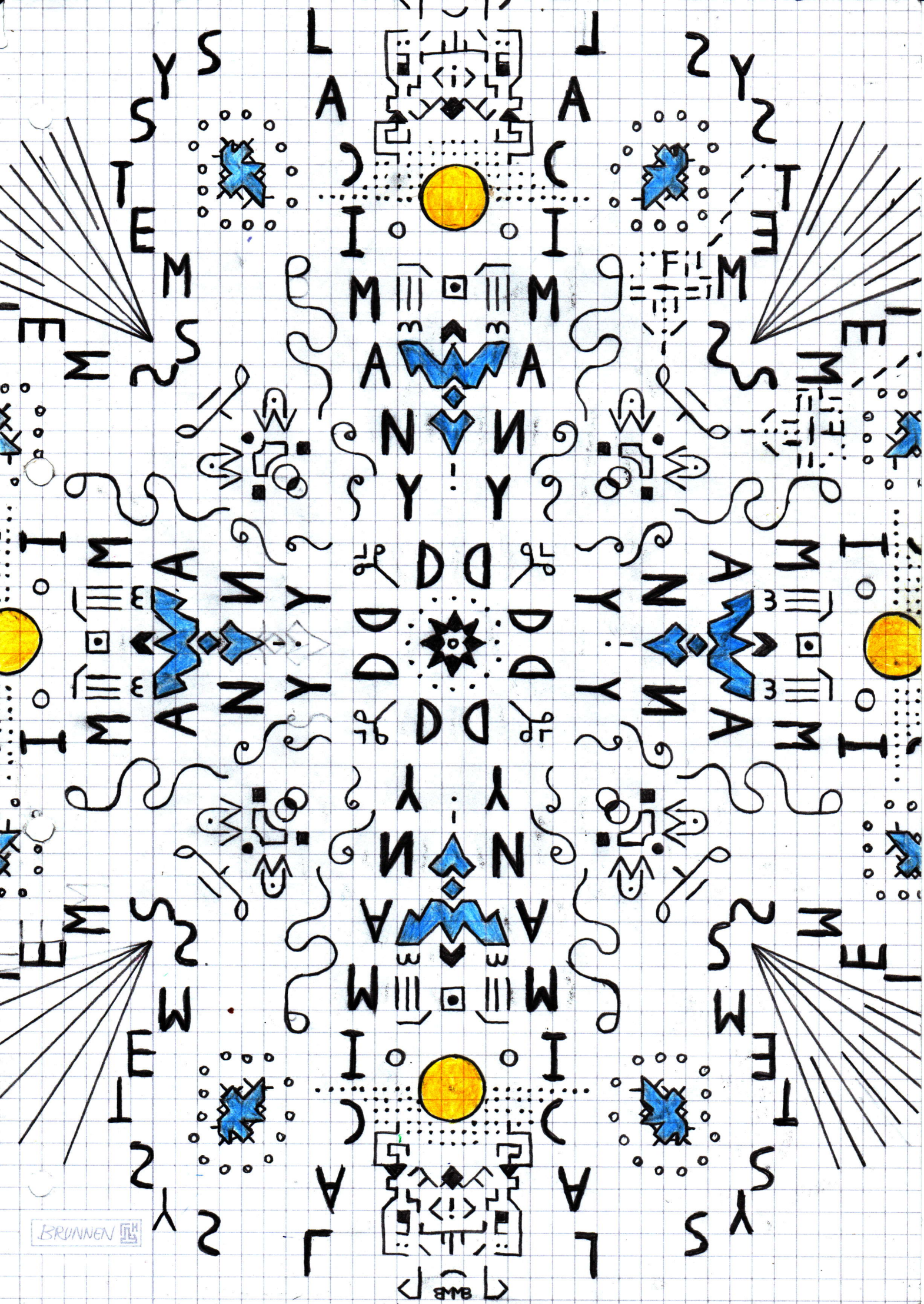






Dynamik III

(Fr. Abgabe Übungszettel)

Inhaltsverzeichnis:

## 6. Normalformen

1

- 6.1 Problemstellung/Notation
- 6.2 Allgemeine Normalform
- 6.3 Spezielle Wahl der Normalform
- 6.4 Beispiele

1  
3  
4  
8



1

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in X = \mathbb{R}^N, \text{ Fluss}$$

local:  $f(x_0) \neq 0$  äquivalent zu  $g(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$   
nach Tr.  $f$

$$x = \Phi(y)$$

$$\frac{d}{dt}: \quad \Phi'(y) \dot{y} = \dot{x} = f(x) = (f \circ \Phi)(y)$$

$$\dot{y} = g(y) := \underbrace{(\Phi'(y))^{-1} (f \circ \Phi)(y)}$$

$$g =: \Phi^*, \text{ zurückziehen}$$

Was, wenn  $f(x_0) = 0$ , z.B. in  $x_0 = 0$

$$f(x) = Ax + \dots, \quad A := f'(0)$$

Linearisieren

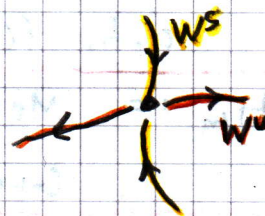
$$\dot{y} = Ay \quad ?$$

OK mit Homöo  $\Phi$  ( $A$  hyp) manchmal

( $A$  hyp + ...)  $\Phi \in C^k$

$A$  hyp:

$A$  nicht-hyp:  $C^k$  Zentrumstf.



## 6.1 Normalformen

[Vanderbauwhede] Normal forms & center mf.

Dynamics Reportet 1

[Guckenheimer & Holmes]

[Arnold] Geometrical Methods

[Chow & Hale] Bifurcation Theory

## 6.1 Problemstellung, Notation

Ziel: Transformiere  $\dot{x} = f(x) = Ax + \dots$ ,  $f \in C^\infty$

lokal habe Glgew.  $x=0$  durch  $\Phi$ ,  $C^\infty$ -Diffeo,

auf "möglichst einfache Form", d.h. Normalform

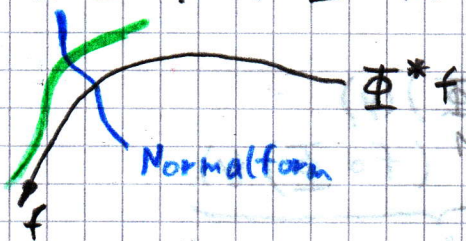
$$\dot{y} = g(y) := (\Phi^* f)(y)$$

$$x = \Phi(y)$$



## Abstrakte Sichtweise:

(Lie-)Gruppe der Diffeos  $\Phi$  operiert auf Menge der Vektorfelder  $f$  (der Lie-Algebra) durch  $f \mapsto \Phi^* f$ .



Beispiele: (linear, "baby")

Jordansche NF

Sei  $f \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\Phi \in GL(N, \mathbb{R})$

Matrizen,  $f = A$  alias

lin V-Feld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x &= Sy \\ \dot{y} &= \underbrace{(S^{-1}AS)}_{g(y)} y \end{aligned}$$

Jordan NF

## Notation:

Zu  $f \in C^\infty$  setze

$$\tilde{T}_m f := \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m$$

m-ter Taylor-Term

$$T_n f := \sum_{m=0}^n \tilde{T}_m f, \text{ htes Taylor-Polynom}$$

$$C_1^\infty(A) := \{ f \in C^\infty \mid (T_1 f)(x) = Ax \}$$

d.h.  $f(x) = Ax + \dots$

$H_m :=$  Menge der Polynome  $(\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N)$  vom Grad  $m$ , lin. V-Raum (hohe Dimension!)

Zu  $\varphi, \psi \in C^\infty$  Lie-Ableitung  $(\mathcal{L}_\varphi \psi)(x) := \varphi'(x) \cdot \psi(x)$

Lie-Klammer:  $[\varphi, \psi] := \mathcal{L}_\varphi \psi - \mathcal{L}_\psi \varphi$

adjungierte (Darstellung)  $(\text{ad } \varphi) \psi := [\varphi, \psi]$

N.B.: alles bilinear in  $\varphi, \psi$

Lineares Beispiel:  $\varphi(x) = Ax$ ,  $\psi(x) = Bx$

Lie-Gruppe:  $GL(N, \mathbb{R})$   $(\mathcal{L}_B A)x = (AB)x$

Lie-Algebra:  $M(N, \mathbb{R})$

$$[A, B] = AB - BA$$

Bsp. 2:

$$\mathcal{L}_\varphi \text{id} = \varphi$$

Falls  $\varphi(x) = Ax$  linear, dann  $((\text{ad } A) \psi)(x)$

$$= A \cdot \psi(x) - \psi'(x) \cdot Ax$$

NB:

$$\text{ad}_m A := \text{ad } A|_{H_m} : H_m \rightarrow H_m$$



6.2 Allgemeine Normalform

Satz: Fixiere, für jedes  $m \geq 2$  beliebige (lineare) Komplemente  $W_m$  zu Bild  $(\text{ad}_m A)$  in  $H_m$ , d.h.

$$H_m = \text{Bild}(\text{ad}_m A) \oplus W_m.$$

Dann ex. zu jedem Vektorfeld  $f \in C_1^\infty(A)$  ein (lokaler) Diffeo  $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$ , sodass für das lokale  $C^\infty$ -Vektorfeld  $g := \Phi^* f \in C_1^\infty(A)$  gilt

$$\tilde{T}_m g \in W_m \quad (\forall m \geq 2)$$

d.h.  $g$  ist in Normalform

Bsp: Angenommen  $\ker \text{ad}_m A = 0 \quad (\forall m)$

d.h.  $\text{ad}_m A$  surj.,  $W_m = \{0\}$ . Dann folgt

$$\tilde{T}_m g = 0 \quad (\forall m \geq 2) \quad \text{d.h.} \quad \dot{y} = Ay + \tilde{g}(y),$$

wobei alle Ableitungen von  $\tilde{g}$  in  $y=0$  verschwinden, (d.h.  $\tilde{g}$  flach) ( $\tilde{g} \approx e^{-1/|y|^2}$ )

Lemma 1: Gegeben  $f \in C_1^\infty(A)$ ,  $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$ .

Dann gilt für  $g := \Phi^* f$  und beliebiges  $m \geq 2$ :

$$\tilde{T}_m g = (\text{ad}_m A) \tilde{T}_m \Phi + R_m(T_m f, T_{m-1} \Phi, T_{m-1} g)$$

$$R_m = \tilde{T}_m (T_m(f-A) \circ T_m \Phi - \mathcal{L}_{T_{m-1} g - A} (T_{m-1} - \text{id}))$$

Beweis (Lemma 1)

$$\mathcal{L}_g \Phi(y) = \Phi'(y) g(y) \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \Phi)(y) \quad \begin{matrix} g = \Phi^* f \\ \Phi = \Phi \end{matrix}$$

$$g = \mathcal{L}_g \text{id} = \mathcal{L}_g \Phi - \mathcal{L}_g (\Phi - \text{id})$$

$$= (f \circ \Phi) - \mathcal{L}_A (\Phi - \text{id}) - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$\begin{aligned} (\text{ad}_m A) \Phi &= \\ \mathcal{L}_\Phi A - \mathcal{L}_A \Phi &= \\ A \Phi - \mathcal{L}_A \Phi \end{aligned}$$

$$g = \Phi^* f$$

$$= A \Phi + (f-A) \Phi - \mathcal{L}_A \Phi + A - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$= (\text{ad}_m A) \Phi + A + (f-A) \Phi - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$\tilde{T}_m g = \tilde{T}_m ((\text{ad}_m A) \Phi) + \tilde{T}_m A + \tilde{T}_m (T_m(f-A) \circ T_m \Phi) \quad \begin{matrix} = 0, m \geq 2 \end{matrix}$$



$$- \mathcal{L}_{T_{m-1}g-A} (T_{m-1}\Phi - \text{id})$$

$R_m$

$$\mathcal{L}_{g-A} \Phi - \text{id} = (\Phi - \text{id}) \cdot (g-A)$$

**Lemma 2:** (Borel-Lemma) [Émile Borel (1871-1956)]

Gegeben bel.  $\varphi_m \in H_m, \forall m \geq 0$ , ex.  $\varphi \in C^\infty$  mit

$$\frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) x^m = \varphi_m \quad (\text{auch und besonders wenn die Taylorreihe } \sum_{m \geq 0} \varphi_m \text{ nicht konvergiert})$$

Beweis: [Vdb], [Gullenin & Galtitsky] (Lemma 2)

Idee:  $\varphi := \sum \chi_m \varphi_m \in C_m^\infty \subseteq \mathcal{G}^m$  mit  $q \leq 1$   
 $\uparrow$   
 $C^\infty$ -Hüte  $\text{supp } \chi_m$   
 mit Träger so klein,  
 dass Summe abs. glm. kvgt.

Beweis: (Satz) (S.3)

Wähle rekursiv  $\varphi_m$ , sodass  $R_m + \text{adm } A \varphi_m \in W_m$

die Summe  $x + \varphi_2 + \dots + \varphi_{m-1}$  einsetzen.

und für  $T_{m-1} g$  natürlich  $Ax + g_2 + \dots + g_{m-1}$ .

Das geht nach Lemma 1. Nach Lemma 2 ex.

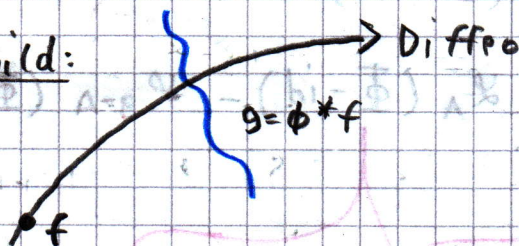
$$\Phi \in C^\infty \text{ mit } \tilde{T}_k \Phi = \varphi_k \quad (\forall k \geq 0)$$

Eingesetzt ergibt sich dann (wieder nach Lemma 1),

$$\tilde{T}_m g = g_m \in W_m \quad \text{für } g := \Phi^* f$$

□

Also Bild:



### 6.3 Spezielle Wahl der Normalform

Wir sehen, dass bei geg.  $f, A$  und gegebenen Komponenten  $W_m$



die Taylor-Entw. der Normalform  $g$  eindeutig bestimmt ist. (Die Taylor-Entwicklung der Transformation  $\Phi$  ist nur bis auf additive Terme  $\varphi_m \in \ker(\text{ad}_m A)$  eindeutig).

Um die Eindeutigkeit von  $g$  trotzdem zu erzielen müssen wir also die  $W_m$  noch festlegen.

Satz: (a) Für  $W_m := \ker(\text{ad}_m(A^T))$  gilt

$$(b) H_m = \text{Bild}(\text{ad}_m A) \oplus W_m \quad (1)$$

(b) Für die resultierende Normalform  $g$  aus 5.2 vertauscht dann  $T_m g$  mit der Gruppe

$$\Gamma := \text{clos} \{e^{A^T t}, t \in \mathbb{R}\}, \text{ d.h.}$$

$$(T_m g)(xy) = x \tilde{T}_m g(y) \quad (2)$$

(c) falls zusätzlich  $A A^T = A^T A$   
d.h.  $A$  normal (Bsp:  $A = A^T, \dots$ ), dann

für jedes  $m \geq 2$  und DGL  $(3)$

$$\dot{y} = (T_m g)(y) \quad (\text{Taylor-Entw. bis Ordnung } m) \quad (3)$$

$$y(t) \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow x \cdot y(t) \text{ Lösung} \quad (\forall x \in \Gamma)$$

Lemma: Sei  $h \in C^\infty$ ,  $h_t(x) := e^{-At} h(e^{At} x)$

Dann gilt

$$(i) (\text{ad } A \cdot h)_t = \text{ad } A \cdot h_t = -\partial_t h_t$$

$$(ii) \text{ad } A \cdot h \equiv 0 \Leftrightarrow \partial_t h_t \equiv 0 \quad (\forall t)$$

$$\Leftrightarrow h_t = h_0 = h \quad (\forall t)$$

Beweis: (i) nachrechnen

$$\begin{aligned} (\text{ad } A \cdot h)_t &= e^{-At} (A h(e^{At} x) - h'(e^{At} x) A e^{At} x) \\ \text{ad } A \cdot h_t &= A e^{-At} h(e^{At} x) - e^{-At} h'(e^{At} x) e^{At} A x \\ - \partial_t h_t &= A e^{-At} h(e^{At} x) - (e^{-At} h'(e^{At} x) A e^{At} x) \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ad } A \cdot h \equiv 0 \Leftrightarrow (\text{ad } A \cdot h)_t \equiv 0 \quad (\forall t) \Leftrightarrow -\partial_t h_t \equiv 0$$



## Beweis (Satz)

Skalarprodukt auf  $H_m$

Idee:  $W_m := \ker(\operatorname{ad}_m(A^T)) \stackrel{!}{=} \ker((\operatorname{ad}_m A)^T)$

$$= (\operatorname{Bild} \operatorname{ad}_m A)^\perp \perp \operatorname{Bild}(\operatorname{ad}_m A)$$

lin. alg.

ist zulässige Wahl im NF-Satz aus 6.2  $\Rightarrow$  (a)

Skalarprodukt:  $\langle L\psi, \psi \rangle_{H_m} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \psi, L^T \psi \rangle \quad (\forall \psi, \varphi \in H_m)$

Ziel: finde Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sodass

$(\operatorname{ad}_m A)^T \stackrel{!}{=} \operatorname{ad}_m(A^T)$

$\uparrow$  in  $H_m$   $\uparrow$  in  $\mathbb{R}^N$  bzgl. Eukl. SP.

(b) folgt dann aus dem Lemma, weil

$$\hat{T}_m g \in W_m = \ker(\operatorname{ad}_m(A^T))$$

(c) folgt, weil Beh. über Lsg.  $\Leftrightarrow T_m g(xy) = g T_m g(y)$   
( $\forall x, y, m$ )

$$f(\sigma, y) = (\sigma y)' = \sigma y' = \sigma f(y)$$

$\infty$  dim:  $L: X \rightarrow X$  | [Kato]

Fredholm operators, Fredholm index

$$i(L) = \dim \ker L - \operatorname{codim}(\operatorname{Range} L)$$

Fredholm alternative  $\Leftrightarrow$   $i(L) = 0 \Leftrightarrow \dim \ker L \Leftrightarrow \operatorname{codim} \operatorname{Range} L$   
 $\Leftrightarrow$  (inj.  $\Leftrightarrow$  surj.)

Lemma 1:  $\{\text{Fredholm}\} = \text{open}$  (in bd. op), index = stetig

Lemma 2:  $L \in \text{Fredh}(i) \Rightarrow L + K \in \text{Fredh}(i) \quad \forall K \text{ kpt.}$

For  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  we have  $i(L) = i(0) = m - n$

19.04.2011

S. 3 Beispiel in  $\infty$ -dim

2

Schritt 1: Aus  $\langle f \circ B^T, g \rangle = \langle f, g \circ B \rangle \quad (\forall \text{ Matrizen } B)$  folgt \*

Schritt 2: und (\*\*) ist wirklich wahr.

Für:  $\langle a_\beta x^\beta, b_{\beta'} x^{\beta'} \rangle := \delta_{\beta\beta'} \cdot \underbrace{a_\beta}_{x_1^{\beta_1} \dots x_N^{\beta_N}} \cdot \underbrace{b_{\beta'}}_{\text{Monom}} \cdot \underbrace{1}_{\mathbb{R}^n \text{-Skalarprodukt}}$



Dyn3Schritt 1:

Seien  $f, g \in C^\infty$ . Dann  $\langle f, e^{-At} g \circ e^{At} \rangle$   
 $= \langle e^{-At} f, g \circ e^{At} \rangle = \langle e^{-At} \cdot (f \circ e^{At}), g \rangle$

$$\Rightarrow \left. \frac{-\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \langle f, (\text{ad } A) g \rangle = \langle \text{ad}(A^T) f, g \rangle$$

|| def.

$$\langle (\text{ad } A)^T f, g \rangle \quad (\forall f, g), \text{ also}$$

$$(\text{ad } A)^T = \text{ad}(A^T)$$

Schritt 2: Ganz mieser Buchhaltungstrick

Betrachte zunächst Polynome (skalar)  $p, q$  und  
 entsprechendes  $\langle p, q \rangle$ . Dann gilt  $\langle p, q \rangle = (p(\partial) q)(\sigma)$ .

Indem wir für  $p(x) := \sum a_k x^k$  setzen:

$$p(\partial) := \sum a_k \partial_x^k \quad \partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$$

Denn: bilinear, OK auf Monom-Basis. Wir behaupten

$$(***) \quad (p(\partial))(q \circ B) \stackrel{!}{=} ((p \circ B^T)(\partial) q) \circ B^T$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad (**): \quad (f \circ B^T, g) &= \sum_k \langle p_k \circ B^T, q_k \rangle = \sum_k (p_k \circ B^T)(\partial) q_k \quad f = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \\ &= \sum_k ((p_k \circ B^T)(\partial) q_k)(\sigma) \quad g = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \\ &\quad \text{mit } \sigma \circ B^T = \sigma \\ &= \sum_k (p_k(\partial) (q_k \circ B))(\sigma) = \langle f, g \circ B \rangle \end{aligned}$$

(\*\*\*)

Zeige nur noch (\*\*\*) für Monom  $p = x^k$  (beide Seiten bilinear)

Induktion über  $m = |k| = k_1 + \dots + k_n$

$$\begin{aligned} \underline{m=1} \quad p &= x_i \quad \text{l. S.} \quad p(\partial)(q \circ B) = \partial_{x_i}(q \circ B) \\ &= \sum_j ((\partial_j q) \circ B) B_{ji} \quad \text{kettenregel} \quad \parallel = B_{ji}^T \end{aligned}$$

$$\text{r. S.:} \quad ((p \circ B^T)(\partial) q) \circ B = \sum_j (B_{ji}^T \partial_j q) \circ B$$

...  $\rightarrow m$  Sei  $p = r \cdot s$ , Grad  $r, s < \text{Grad } p$ .

$$\text{Dann gilt } ((r \cdot s)(\partial))(q \circ B) = r(\partial)(s(\partial)(q \circ B))$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{=} r(\partial) \left( \underbrace{(s \circ B^T)(\partial) q}_q \circ B \right)$$



$$\stackrel{\text{Ind}(r)}{=} (r \circ B^T) (\partial) ((s \circ B^T) (\partial) q) \circ B = \underbrace{((r \circ s) \circ B^T) (\partial) q}_P \circ B$$

wie behauptet, (\*)

□

## 6.4 Beispiele

Vorbemerkung: Unsere Theorie der Normalform liefert "einfachere" Vektor-Felder  $g = Ax + g_2 + g_3 + \dots$ , deren Taylorterme  $g_n(x) := \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) x^n$  bis zu beliebig hoher Ordnung in

$$W_m := \text{Kern}(\text{ad}_m A^T)$$

liegen, für  $m \geq 2$ . Wenn wir die Dynamik verstehen wollen, treten drei Probleme auf:

Problem 1: Könnten die exponentiell fallenden Terme in  $g$ , über die wir gar nichts weiter wissen, die Dynamik beeinflussen (nur ja, evtl. nach  $g \Rightarrow \Rightarrow hz$  langen Zeiten).

Problem 2: Ist die Dynamik eventuell schon durch die niedrigsten Taylorterme bestimmt?

Problem 3: Welche Form von  $g$  eignet sich überhaupt gut, um die resultierende Dynamik "leicht" zu verstehen.

Wir werden den alg. Teil betrachten und für P1-P3 auf die Literatur verweisen.

### Beispiel 1: Linearisierung

Sei  $f(x) = Ax + \dots \in C_1^\infty(A)$ ,  $A$  diagonalisierbar:  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$

Behauptung: Falls Nicht-Resonanz gilt, d.h.

$$(*) \quad \lambda_j - \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \alpha_k \neq 0 \quad (\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m, m = |\alpha| \geq 2)$$

dann ist  $W_m = \text{Kern} \text{ad}_m A^{(T)} = \{0\}$ , d.h.  $\text{ad}_m A: H_m \rightarrow H_m$  surj.



## Dyn 3

also  $g(x) = Ax + \dots$   
exp. flach

## [Poincaré] Thesis

Beweis:  $(\text{adm}) \underbrace{x^\beta e_j}_{h(x)} = A x^\beta e_j - \sum_k e_j (\partial_k x^\beta) \underbrace{(Ax)_k}_{\lambda_k x_k}$   
 $= (\lambda_j - \sum_k \beta_k \lambda_k) \underbrace{x^\beta e_j}_{x^\beta e_j}$   
 Eigenwert  
 $= \mu_{j,\beta} \text{ von } \text{adm } A$

Also ist  $\text{adm } A$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\mu_{j,\beta} \neq 0$  (\*)  $\square$

Grobman, Hartman:  $C^0$ -Linearisierung für  $0 \notin \text{Re spec } A$   $\square$

Shoshitashvili, Palmer: —"— auf  $\dot{x} = x, \dot{y} = -y, \dot{z} = \varphi(z)$

Soll ("Sternberg conditions"):  $A$  hyp.  $C^k$ -lin. zentrums-mf.

falls (\*) für alle  $|\beta| \leq s(k) < \infty$  (1985)

Takens (1970s): Eine Art  $C^k$ -Shoshitashvili, Trf. auf

$$\dot{x} = \underbrace{A(z)x}_{\text{hyp}}, \quad \dot{z} = \varphi(z) \quad (\text{ZMF}), \quad \varphi(0) = 0$$

falls (\*) für alle  $|\beta| \leq \tilde{s}(k, A)$

## Bsp 2: Hopf-Verzweigung

(Poincaré-Aldronov-E. Hopf)

Betr. einfache imaginäre EW.  $\pm i\omega$  im sonst hyp.

Spektrum von  $A$ . ZMF  $\Rightarrow$  OE  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resonanz:  $i - (\underbrace{2i}_{\beta_1} + \underbrace{1(-i)}_{\beta_2}) = 0$

Normalfall:  $A^T = -A$  vertauscht mit  $A$  also

6.3 Satz (e): Normalform  $g$  vertauscht mit

Drehgruppe  $\Gamma := "c(\text{os})" \{ e^{A^T t} \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ e^{At} \mid t \in \mathbb{R} \}$

komplexe Koord:  $z$  und  $\bar{z}$  für  $(x, y) \rightarrow x + iy$

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \bar{z}^k + \dots$$



Äquivarianz  $g(e^{it} z) = e^{it} g(z) \quad (\forall t, z)$

heißt:  $g(e^{it} z) = \sum_{k, l \geq 0} \alpha_{k, l} e^{i(k-l)t} z^k \bar{z}^l + \dots$

" $\parallel$ "  
 $e^{it} g(z) = \sum_{k, l \geq 0} \alpha_{k, l} e^{it} z^k \bar{z}^l$

Also:  $\alpha_{k, l} = 0$  oder  $k - l = 1$  d.h.  $(k = l + 1)$

$g(z) = \sum_{l \geq 0} \alpha_l |z|^{2l} z + \dots$  N.B.:  $\alpha_0 = i$

Polarkoord  $z = r e^{i\varphi}$

$\dot{r} e^{i\varphi} + i r e^{i\varphi} \dot{\varphi} = \dot{z} = g(z) = \left( \sum_{l \geq 0} \alpha_l r^{2l} \right) r e^{i\varphi} + \dots$

also  $\dot{r} = \left( \sum_{l \geq 0} (\operatorname{Re} \alpha_l) r^{2l} \right) r + \dots$

$\dot{\varphi} = \sum_{l \geq 0} \operatorname{Im} \alpha_l r^{2l} + \dots$

"..." weglassen (Problem 1!)

$\dot{r} = (\operatorname{Re} \alpha_1) r^3 + \dots$

$\dot{\varphi} = 1 + (\operatorname{Im} \alpha_1 + \dots) r^2 + \dots$

Analog lassen sich Vektorfelder mit

1dim reellen Parameter  $\lambda$  diskutieren:  $\dot{x} = f(\lambda, x)$ , für  $\lambda = 0$

wie oben. Wir erhalten  $\lambda$ -abh. Normalform

$\dot{z} = g(\lambda, z) = \left( \sum_{l \geq 0} \alpha_l(\lambda) |z|^{2l} \right) z + \dots$

Selbe Hm-Zerlegung wie für  $\lambda = 0$  nutzbar!) Für EW.

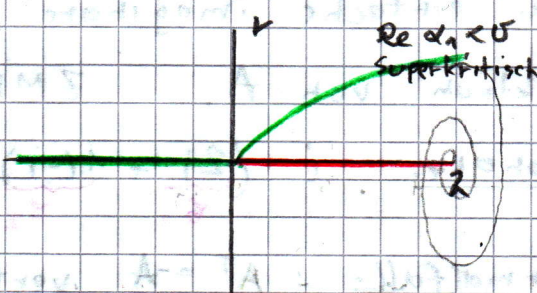
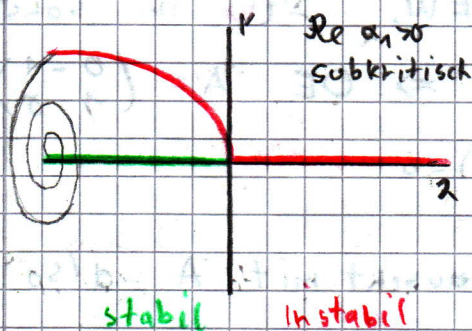
$\alpha_0(\lambda) = \lambda + i$  gilt dann

$\dot{r} = (\lambda + \operatorname{Re} \alpha_1 r^2 + \dots) r$

$\dot{\varphi} = 1 + \operatorname{Im} \alpha_1 r^2 + \dots$

periodischer Orbit  $\dot{r} = 0$

$r^2 = -\frac{\lambda}{\operatorname{Re} \alpha_1} + \dots$



Beispiel 3: Takens - Bogdanov Punkte,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

spec A

Arnold (1972, 1975)

(1976)

stat.  
Verzweigung  
Gleichgewichte

Hopf



Normalform in  $\mathbb{R}^2$   $g(x) = Ax + g_2 + \dots$

$$g_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k \quad a_k \in \mathbb{R}^2$$

$$\in \text{Ker}(\text{ad}_m A^T), \quad A^T x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (\text{ad}_m A^T) g_m(x) = A^T g_m(x) - g'_m A^T x$$

$$= \sum_{k=0}^m A^T a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k - \sum_{k=0}^m (\partial_{x_2} \dot{x}_1^{m-k} x_2^k) \cdot x_1 a_k$$

$$= \sum_{k=0}^m A^T a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k - \sum_{k=0}^m k \dot{x}_1^{m-k-1} x_2^k a_k$$

$$= A^T a_m \dot{x}_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} (A^T a_k - (k+1) a_{k+1}) \dot{x}_1^{m-k} x_2^k$$

Also gilt in NF:

$$A^T a_m = 0 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1} A^T a_k$$

Wegen  $(A^T)^2 = 0$  folgt  $a_0$  beliebig,  $a_1 = A^T a_0$ ,

$$a_2 = \dots = a_m = 0, \quad m \geq 0$$

Ausschreiben bis 2. Ordnung

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1^2 + \dots$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + \dots$$

Mit zwei Parametern  $\alpha, \beta$  "entfaltet" man den doppelten Eigenwert 0, in  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , zum V-Feld

"Pendel:"

$$\vartheta_1 := x_1, \quad \vartheta_2 := x_2 + \alpha x_1^2 + \dots$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = a \vartheta_1^2 + b \vartheta_1 \vartheta_2 + \dots$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \vartheta_1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_1 \vartheta_2$$

(Koeff.  $a, b$  auf  $1, \pm 1$  normieren durch Skalierung 1.

Satz: [Bergshoeff]:

Für ①  $\dot{x} = f(v, x)$  mit  $f(0, x) = Ax + \dots$  gilt unter gewissen Nicht-Entartungs-Bedingungen an  $f$  dass

① äquivalent ist zu  $\dot{x} = \lambda(v) x$ , mit  $\lambda = \lambda(v)$

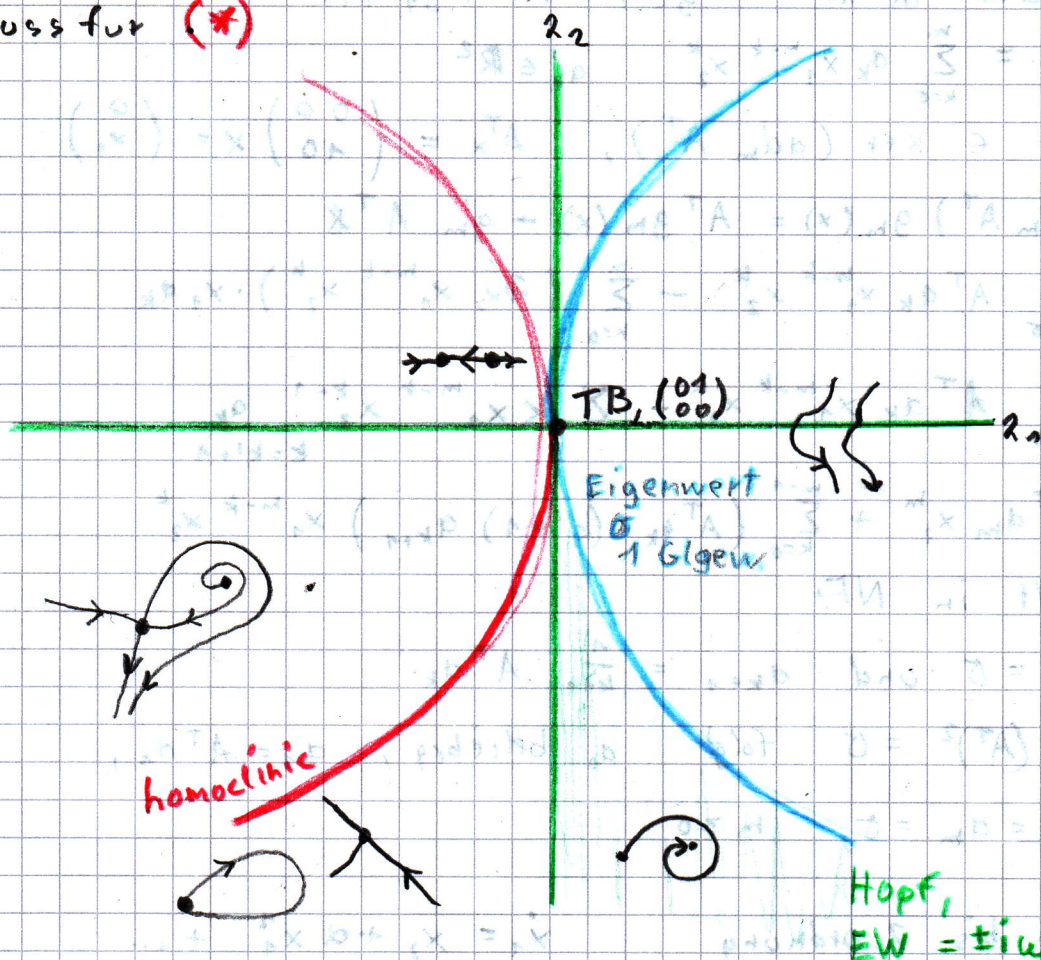
100  
Homöo



$$u_3 = \Xi(p, x)$$

stetig,  $\Xi(p, \cdot) \in C^0\text{-Homöo}$

Fluss für (\*)



3

### 6.5 Iterations

26.09.2011

Consider  $F = Bx + \dots \in C_1^\infty(B)$  with  $B \in GL(N)$  invertible, i.e. a local diffeo  $F$  with fixed point  $0 \in \mathbb{R}^N$

Trf.  $x = \Phi(y) = y + \dots \in C_1^\infty(\text{id})$ , loc. Diffeo

transforms iteration  $x_{n+1} = F(x_n)$  to  $y_{n+1} = G(y_n)$

$$(\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi)(y_n) = By_n + G_2(y_n) + \dots$$

What does this do to the coefficients?

$$(\Phi \circ G)(y) = (F \circ \Phi)(y)$$

Compare order  $m$  in  $y$ :

$$G_m + \dots + \Phi_m \circ B = F_m + \dots + B \circ \Phi_m$$

Where "... are terms involving  $G_2, \dots, G_{m-1}, B,$

$F_2, \dots, F_{m-1}, \Phi_2, \dots, \Phi_{m-1}$ . Therefore

$$G_m = B \circ \Phi_m - \Phi_m \circ B + R_m(\text{p.o.t.})$$

Therefore we can choose  $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$  such that



$G_m \in (\text{Range } B_m[\cdot])^\perp = \text{Kerh}(B_m[\cdot])$  where  
 $B_m[\Phi_m] := B \circ \Phi_m - \Phi_m \circ B$  is linear and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$   
 is scalar product on  $H_m$

Theorem: For any  $F \in C_1^\infty(B)$ ,  $B \in GL(n)$ , there exists  
 $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$  such that  $G := \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$  is in  
 $B^T[\cdot]$  normal form i.e.:

$$B^T G_m = G_m \circ B^T \quad (\forall m \geq 2)$$

Therefore all these  $G_m$  commute with any

$$\gamma \in T := \text{clos} \{ (B^T)^h \mid h \in \mathbb{Z} \}.$$

If  $B B^T = B^T B$  is normal, then  $\gamma \cdot (T_m G) = (T_m G) \circ \gamma$   
 $((T_m G)(y) := B y + \dots + G_m(y)) \quad (\forall \gamma \in \Gamma, m \geq 2)$

Proof: Show  $(B_m[\cdot])^T \stackrel{!}{=} B_m^T[\cdot]$ , with some sc. prod  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $H_m$  as in section **6.3**

Claim:  $\langle B_m^T[f], g \rangle \stackrel{!}{=} \langle f, B_m[g] \rangle \quad (\forall f, g \in H_m)$

$$\stackrel{!}{=} \langle B^T f, g \rangle = \langle f \circ B^T, g \rangle \quad \langle f, B g \rangle = \langle f, g \circ B \rangle$$

trivial by sc-product in  $\mathbb{R}^n$ , step in **6.3**

Example 1: Period doubling

Consider  $\mathbb{R}^1$ ,  $F(x) = -x + F_2 + \dots$

$$B = -1 = B^T, \quad \Gamma = \mathbb{Z}_2 = \langle -1 \rangle$$

Normal form:  $G(x) = -G(x)$ , odd

(to any finite order, omit ...) Hence we have  
 to study

$$y_{n+1} = G(y_n) = y_n g(y_n^2)$$

This amounts to an iteration of

$$|y_{n+1}| = |y_n| \cdot |g(y_n^2)|$$

In particular any orbit  $|y_n|$  which stays



near  $y=0$  must converge to a fixed point  $|y_*|$ ,

$$g(y_*^2) = 1.$$

In the parameter dependent case  $F(\lambda, x)$  with  $F(0, x) = -x + \dots$   
 we can proceed analogously to get

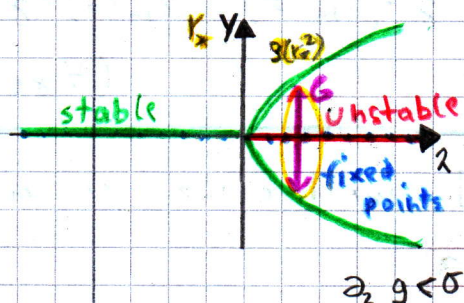
$$y_{n+1} = G(\lambda, y_n) = y_n \cdot g(\lambda, y_n^2)$$

to solve  $g(\lambda, y_*^2) = 1$  near  $g(0, 0) = 1$  we involve implicit function theorem:

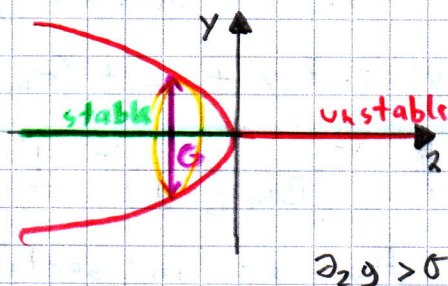
For  $\partial_\lambda g(\lambda=0, y_*^2=0) \neq 0$  we get solution branch

$$\lambda = \lambda(y_*^2) \text{ such that } G(\lambda, \{\pm y_*\}) = \pm y_*$$

(use  $G(0, y) = -y + \dots$ )



$$(\partial_\lambda g > 0)$$



$$(\partial_\lambda g > 0)$$

direct: study  $F \circ F$ , seek fixed points

## Example 2: Bifurcation of invariant "circles"

[Normark, Sacker-Sell (1960s)]

$$F(x) = Bx + \dots \in \mathbb{R}^2, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

rotation by  $\omega$ ,  $\text{spec } B = \pm e^{i\omega}$ . Assume

$$\frac{\omega}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \text{ irrational. Then } \Gamma = S^1 = SO(2)$$

Normal form  $G$  commutes with rotations. Hence

complex rotation  $\underbrace{y_1 + iy_2}_{\in \mathbb{R}^2} = r e^{i\varphi} = z$  produces

iteration (with parameter)

$$\begin{bmatrix} z \\ \bar{z} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e^{i\omega} z \\ e^{-i\omega} \bar{z} \end{bmatrix}$$

$$z_{n+1} = G(\lambda, z_n, \bar{z}_n) = z_n \cdot g(\lambda, |z_n|^2), \quad g(0, 0) = e^{i\omega}$$

$$\text{i.e. } r_{n+1} = r_n \cdot h^R(\lambda, r_n^2) \quad (\text{no } \varphi \text{ here!})$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + h^I(\lambda, r_n^2) \quad \text{where } h^R = |g(\lambda, r_n^2)|, \quad h^I = \text{arg}(g(\lambda, r_n^2))$$



Dyn3

$$\Rightarrow g = h^R e^{ih^I}$$

If solution stays near  $r=0$ , then  $r_n \rightarrow r_*$  with

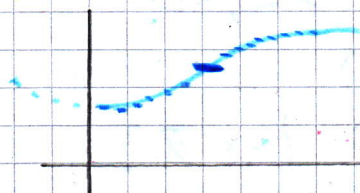
$$h^R(\lambda, r_*^2) = 1 \quad (\text{see period doubling analysis})$$

On these fixed values of  $r_*$  we have an iteration  $h^R(0, \sigma) = 1$  e.g.  $\lambda = \lambda(r_*)$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + h^I(\lambda(r_*^2), r_*^2) \\ =: \omega + r_*^2 \tilde{h}(r_*^2)$$

This iteration on the invariant circle  $r = r_*$  has rotation number  $\theta = \frac{\omega + r_*^2 \tilde{h}(r_*^2)}{2\pi}$

**but:** devil's staircase!

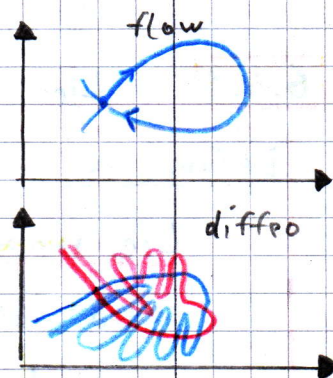


$\theta$  is supposed to be locally constant at any rational value of  $\theta$

plateaus should be very very small

**never** visible in finite order normal forms

$$\dot{x} = Ax, \quad x_{h+1} = e^A x_h \quad \text{for } x_h := x(h)$$



## 6.6 Normal forms: flows, diffeos,

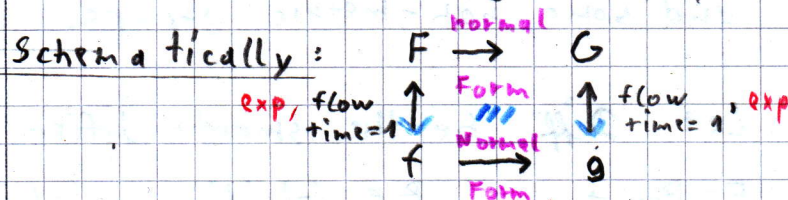
Lie algebras and Lie groups

Theorem [~Takens) (1970s)]

Let  $B = e^A$ ,  $AA^T = A^T A$  in  $\mathbb{R}^N$ . Consider local diffeo

Then  $F$  can be written as the time = 1 map of the flow of a v.f.  $f(x) = Ax + \dots$ , and the  $B^T[\cdot]$

normal form  $G$  of  $F$  is the time = 1 map of the  $\text{ad } A^T$  normal form  $g$  of  $f$ , up to any finite order  $m \geq 2$





More precisely:

Let  $F(x) = Bx + \dots \in C_1^\infty(B)$ ,

let  $\mathcal{F}(f, t)$  denote the flow of  $\dot{x} = f(x)$  at time  $t$ .

Then (i) there exists a v. field  $f \in C_1^\infty(A)$ ,  $f(x) = Ax + \dots$

such that  $T_m F = T_m \mathcal{F}(f, t=1)$   $(\forall m \geq 2)$

(ii) The  $\text{adm } A$  normal form  $g(x) = Ax + \dots = \Phi^* f$

of  $f$  satisfies  $g_m \in \ker(\text{adm}(A^T))$   $(\forall m \geq 2)$

for suitable  $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$

(iii) let  $G := \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$ . Then

$T_m G = T_m \mathcal{F}(g, t=1)$   $\forall m \geq 2$

(iv)  $\otimes G$  is in  $B^T[\cdot]$  normal form, i.e.  $\otimes$

$(T_m G)(\gamma y) = \gamma (T_m G)(y)$

for all  $\gamma \in \Gamma = \text{clos} \{ (B^T)^h \mid h \in \mathbb{Z} \}$ ,

$y \in \mathbb{R}^N$ ,  $m \geq 2$

$\otimes$  Now assume  $AA^T = A^T A$ . Then

## 6.6.1 Lie groups & algebras

[Bredon] [Brocker & Tom Dieck]

Definition: A group  $\mathcal{G}$  is called finite-dimensional Lie group if it is a finite-dimensional manifold and the composition  $F \circ G$  of  $F, G \in \mathcal{G}$  is analytic w.r. to  $F, G$ , in a neighborhood of  $e = \text{id} \in \mathcal{G}$  and in suitable (homeo) coordinates.

Standard examples:

$SO(N), O(N), SE(N)$  ( $= SO(N) + \text{translations}$ )

$SU(N), U(N), SL(N), GL(N)$

$Sp(2N)$ , Minkowski, Poincaré, ...

and some non-metric groups.

$$S^T \partial S = \partial$$

$$\partial = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_N \\ \text{id}_N & 0 \end{pmatrix}$$

Dynamics example:

Let  $\text{Diff}$  be the smooth diffeos

$F = Bx + \dots$ ,  $B \in GL(N)$ , with



Dyh3

composition  $F_m \circ G := T_m(F \circ G)$ 

Definition: The Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of a Lie group  $\mathcal{G}$  is the tangent space at  $e = \text{id} \in \mathcal{G}$ , i.e.  $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G}$ .

In other words  $f \in \mathfrak{g}$  are the tangents  $f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} F(t)$  of smooth paths  $t \rightarrow F(t) \in \mathcal{G}$  at  $F(0) = e$

Note: Fix  $H_0 \in \mathcal{G}$  and consider  $F \mapsto F \circ H_0$  via  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0}$  this defines a map  $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G} \ni f \mapsto f \circ H_0$   
 $\downarrow$   
 $T_{H_0} \mathcal{G}$

Brief excursion: commutators and Lie-bracket.

For curves  $F(t), G(t)$  through  $e$  at  $t=0$  and  $f := \dot{F}(0), g := \dot{G}(0)$  consider the commutator

$$C(t) := F(t) \circ G(t) \circ (F(t))^{-1} \circ (G(t))^{-1}$$

Then  $\dot{C}(0) = 0$ . But  $\tilde{C}(\tau) := C(\sqrt{\tau})$  is  $C^1$  and

$$[f, g] := \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tilde{C}(\tau) \in \mathfrak{g}.$$

It turns out that  $[f, g]$  is bilinear, antisymmetric, with Jacobi identity:  $0 \neq [f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]]$

Conversely: Any finite-dimensional linear space with

such a bracket  $[\cdot, \cdot]$  is called (abstract) Lie algebra

$\tilde{\mathfrak{g}}$ . Via a map exp one can construct a Lie group

$\mathcal{G}$ , such that  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} = \text{Lie algebra of } \mathcal{G}$