

1

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in X = \mathbb{R}^N, \text{ Fluss}$$

local: $f(x_0) \neq 0$ äquivalent zu $g(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
nach Tr. f

$$x = \Phi(y)$$

$$\frac{d}{dt}: \quad \Phi'(y)\dot{y} = \dot{x} = f(x) = (f \circ \Phi)(y)$$

$$\dot{y} = g(y) := (\Phi'(y))^{-1} (f \circ \Phi)(y)$$

$$g =: \Phi^*, \text{ zurückziehen}$$

Was, wenn $f(x_0) = 0$, z.B. in $x_0 = 0$

$$f(x) = Ax + \dots, \quad A := f'(0)$$

Linearisieren:

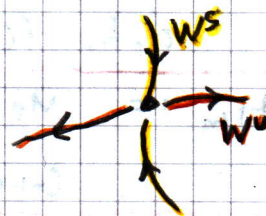
$$\dot{y} = Ay \quad ?$$

OK mit Homöo Φ (A hyp) manchmal

(A hyp + ...) $\Phi \in C^k$

A hyp:

A nicht-hyp: C^k Zentrumstf.



6.1 Normalformen

[Vanderbauwhede] Normal forms & center mf.

Dynamics Reportet 1

[Guckenheimer & Holmes]

[Arnold] Geometrical Methods

[Chow & Hale] Bifurcation Theory

6.1 Problemstellung, Notation

Ziel: Transformiere $\dot{x} = f(x) = Ax + \dots$, $f \in C^\infty$

lokal habe Glgew. $x=0$ durch Φ , C^∞ -Diffeo,

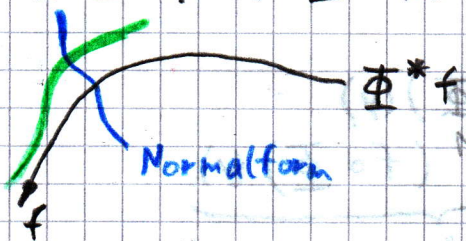
auf "möglichst einfache Form", d.h. Normalform

$$\dot{y} = g(y) := (\Phi^* f)(y)$$

$$x = \Phi(y)$$

Abstrakte Sichtweise:

(Lie-)Gruppe der Diffeos Φ operiert auf Menge der Vektorfelder f (der Lie-Algebra) durch $f \mapsto \Phi^* f$.



Notation:

Zu $f \in C^\infty$ setze

$$\tilde{T}_m f := \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m$$

m-ter Taylor-Term

$$T_n f := \sum_{m=0}^n \tilde{T}_m f, \text{ htes Taylor-Polynom}$$

$$C_1^\infty(A) := \{ f \in C^\infty \mid (T_1 f)(x) = Ax \}$$

d.h. $f(x) = Ax + \dots$

$H_m :=$ Menge der Polynome $(\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N)$ vom Grad m , lin. V-Raum (hohe Dimension!)

Zu $\varphi, \psi \in C^\infty$ Lie-Ableitung $(\mathcal{L}_\varphi \psi)(x) := \varphi'(x) \cdot \psi(x)$

Lie-Klammer: $[\varphi, \psi] := \mathcal{L}_\varphi \psi - \mathcal{L}_\psi \varphi$

adjungierte (Darstellung) $(\text{ad } \varphi) \psi := [\varphi, \psi]$

N.B.: alles bilinear in φ, ψ

Lineares Beispiel: $\varphi(x) = Ax$, $\psi(x) = Bx$

Lie-Gruppe: $GL(N, \mathbb{R})$ $(\mathcal{L}_B A)x = (AB)x$

Lie-Algebra: $M(N, \mathbb{R})$

$$[A, B] = AB - BA$$

Falls $\varphi(x) = Ax$ linear, dann $((\text{ad } A) \psi)(x)$

$$= A \cdot \psi(x) - \psi'(x) \cdot Ax$$

NB:

$$\text{ad}_m A := \text{ad } A \big|_{H_m} : H_m \rightarrow H_m$$

Beispiel: (linear, "baby")

Jordansche NF

Sei $f \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\Phi \in GL(N, \mathbb{R})$

Matrizen, $f = A$ alias

lin V-Feld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x &= Sy \\ \dot{y} &= (S^{-1}AS)y = g(y) \end{aligned}$$

Jordan NF

6.2 Allgemeine Normalform

Satz: Fixiere, für jedes $m \geq 2$ beliebige (lineare) Komplemente W_m zu Bild $(\text{ad}_m A)$ in H_m , d.h.

$$H_m = \text{Bild}(\text{ad}_m A) \oplus W_m.$$

Dann ex. zu jedem Vektorfeld $f \in C_1^\infty(A)$ ein (lokaler) Diffeo $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$, sodass für das lokale C^∞ -Vektorfeld $g := \Phi^* f \in C_1^\infty(A)$ gilt

$$\tilde{T}_m g \in W_m \quad (\forall m \geq 2)$$

d.h. g ist in Normalform

Bsp: Angenommen $\ker \text{ad}_m A = 0 \quad (\forall m)$

d.h. $\text{ad}_m A$ surj., $W_m = \{0\}$. Dann folgt

$$\tilde{T}_m g = 0 \quad (\forall m \geq 2) \quad \text{d.h.} \quad \dot{y} = Ay + \tilde{g}(y),$$

wobei alle Ableitungen von $\tilde{g}$ in $y=0$ verschwinden, (d.h. $\tilde{g}$ flach) ($\tilde{g} \approx e^{-1/|y|^2}$)

Lemma 1: Gegeben $f \in C_1^\infty(A)$, $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$.

Dann gilt für $g := \Phi^* f$ und beliebiges $m \geq 2$:

$$\tilde{T}_m g = (\text{ad}_m A) \tilde{T}_m \Phi + R_m(T_m f, T_{m-1} \Phi, T_{m-1} g)$$

$$R_m = \tilde{T}_m (T_m(f-A) \circ T_m \Phi - \mathcal{L}_{T_{m-1} g - A} (T_{m-1} - \text{id}))$$

Beweis (Lemma 1)

$$\mathcal{L}_g \Phi(y) = \Phi'(y) g(y) \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \Phi)(y) \quad \begin{matrix} g = \Phi^* f \\ g = \Phi^* f \end{matrix}$$

$$g = \mathcal{L}_g \text{id} = \mathcal{L}_g \Phi - \mathcal{L}_g (\Phi - \text{id})$$

$$= (f \circ \Phi) - \mathcal{L}_A (\Phi - \text{id}) - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$\begin{aligned} (\text{ad}_m A) \Phi &= \\ \mathcal{L}_\Phi A - \mathcal{L}_A \Phi &= \\ A \Phi - \mathcal{L}_A \Phi \end{aligned}$$

$$g = \Phi^* f$$

$$= A \Phi + (f-A) \Phi - \mathcal{L}_A \Phi + A - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$= (\text{ad}_m A) \Phi + A + (f-A) \Phi - \mathcal{L}_{g-A} (\Phi - \text{id})$$

$$\tilde{T}_m g = \tilde{T}_m ((\text{ad}_m A) \Phi) + \tilde{T}_m A + \tilde{T}_m (T_m(f-A) \circ T_m \Phi)$$

$$= 0, m \geq 2$$

$$- \mathcal{L}_{T_{m-1}g-A} (T_{m-1}\Phi - \text{id})$$

R_m

$$\mathcal{L}_{g-A} \Phi - \text{id} = (\Phi - \text{id}) \cdot (g-A)$$

Lemma 2: (Borel-Lemma) [Émile Borel (1871-1956)]

Gegeben bel. $\varphi_m \in H_m, \forall m \geq 0$, ex. $\varphi \in C^\infty$ mit

$$\frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) x^m = \varphi_m \quad (\text{auch und besonders wenn die Taylorreihe } \sum_{m \geq 0} \varphi_m \text{ nicht konvergiert})$$

Beweis: [Vdb], [Gullenin & Galtitsky] (Lemma 2)

Idee: $\varphi := \sum \chi_m \varphi_m \in C_m^\infty \subseteq \mathcal{G}^m$ mit $q \leq 1$
 $\uparrow$
 C^∞ -Hüte $\text{supp } \chi_m$
 mit Träger so klein,
 dass Summe abs. glm. kvgt.

Beweis: (Satz) (S.3)

Wähle rekursiv φ_m , sodass $R_m + \text{adm } A \varphi_m \in W_m$

die Summe $x + \varphi_2 + \dots + \varphi_{m-1}$ einsetzen.

und für $T_{m-1} g$ natürlich $Ax + g_2 + \dots + g_{m-1}$.

Das geht nach Lemma 1. Nach Lemma 2 ex.

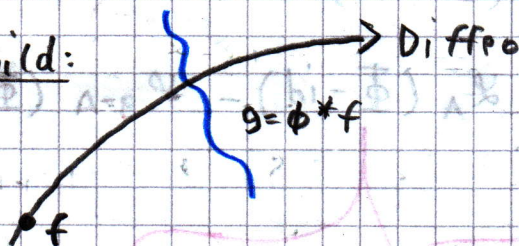
$$\Phi \in C_n^\infty \text{ mit } \tilde{T}_k \Phi = \varphi_k \quad (\forall k \geq 0)$$

Eingesetzt ergibt sich dann (wieder nach Lemma 1),

$$\tilde{T}_m g = g_m \in W_m \quad \text{für } g := \Phi^* f$$

□

Also Bild:



6.3 Spezielle Wahl der Normalform

Wir sehen, dass bei geg. f, A und gegebenen Komponenten W_m

die Taylor-Entw. der Normalform g eindeutig bestimmt ist. (Die Taylor-Entwicklung der Transformation Φ ist nur bis auf additive Terme $\varphi_m \in \ker(\text{ad}_m A)$ eindeutig).

Um die Eindeutigkeit von g trotzdem zu erzielen müssen wir also die W_m noch festlegen.

Satz: (a) Für $W_m := \ker(\text{ad}_m(A^T))$ gilt

$$(b) H_m = \text{Bild}(\text{ad}_m A) \oplus W_m \quad (1)$$

(b) Für die resultierende Normalform g aus 5.2 vertauscht dann $T_m g$ mit der Gruppe

$$\Gamma := \text{clos} \{e^{A^T t}, t \in \mathbb{R}\}, \text{ d.h.}$$

$$(T_m g)(xy) = x \tilde{T}_m g(y) \quad (2)$$

(c) falls zusätzlich $A A^T = A^T A$ d.h. A normal (Bsp: $A = A^T, \dots$), dann

für jedes $m \geq 2$ und DGL (3)

$$\dot{y} = (T_m g)(y) \quad (\text{Taylor-Entw. bis Ordnung } m) \quad (3)$$

$$y(t) \text{ ist Lösung} \Leftrightarrow x \cdot y(t) \text{ Lösung} \quad (\forall x \in \Gamma)$$

Lemma: Sei $h \in C^\infty$, $h_t(x) := e^{-At} h(e^{At} x)$

Dann gilt

$$(i) (\text{ad } A \cdot h)_t = \text{ad } A \cdot h_t = -\partial_t h_t$$

$$(ii) \text{ad } A \cdot h \equiv 0 \Leftrightarrow \partial_t h_t \equiv 0 \quad (\forall t) \\ \Leftrightarrow h_t = h_0 = h \quad (\forall t)$$

Beweis: (i) nachrechnen

$$\begin{aligned} (\text{ad } A \cdot h)_t &= e^{-At} (A h(e^{At} x) - h'(e^{At} x) A e^{At} x) \\ \text{ad } A \cdot h_t &= A e^{-At} h(e^{At} x) - e^{-At} h'(e^{At} x) e^{At} A x \\ - \partial_t h_t &= A e^{-At} h(e^{At} x) - (e^{-At} h'(e^{At} x) A e^{At} x) \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ad } A \cdot h \equiv 0 \Leftrightarrow (\text{ad } A \cdot h)_t \equiv 0 \quad (\forall t) \Leftrightarrow -\partial_t h_t \equiv 0$$

Beweis (Satz)

Skalarprodukt auf H_m

Idee: $W_m := \ker(\operatorname{ad}_m(A^T)) \stackrel{!}{=} \ker((\operatorname{ad}_m A)^T)$

$$= (\operatorname{Bild} \operatorname{ad}_m A)^\perp \perp \operatorname{Bild}(\operatorname{ad}_m A)$$

lin. alg.

ist zulässige Wahl im NF-Satz aus 6.2 $\Rightarrow$ (a)

Skalarprodukt: $\langle L\psi, \psi \rangle_{H_m} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \psi, L^T \psi \rangle \quad (\forall \psi, \eta \in H_m)$

Ziel: finde Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sodass

$(\operatorname{ad}_m A)^T \stackrel{!}{=} \operatorname{ad}_m(A^T)$

in H_m in $\mathbb{R}^N$ bzgl. Eukl. SP.

(b) folgt dann aus dem Lemma, weil

$$\tilde{T}_m g \in W_m = \ker(\operatorname{ad}_m(A^T))$$

(c) folgt, weil Beh. über Lsg. $\Leftrightarrow T_m g(xy) = g T_m g(y)$
 $(\forall x, y, m)$

$$f(\sigma, y) = (\sigma y)' = \sigma y' = \sigma f(y)$$

∞ dim: $L: X \rightarrow X$ | [Kato]

Fredholm operators, Fredholm index

$$i(L) = \dim \ker L - \operatorname{codim}(\operatorname{Range} L)$$

Fredholm alternative $\Leftrightarrow$ $i(L) = 0 \Leftrightarrow \dim \ker L \Leftrightarrow \operatorname{codim} \operatorname{Range} L$
 $\Leftrightarrow (\text{inj.} \Leftrightarrow \text{surj.})$

Lemma 1: $\{\text{Fredholm}\} = \text{open}$ (in bd. op), index = stetig

Lemma 2: $L \in \text{Fredh}(i) \Rightarrow L + K \in \text{Fredh}(i) \quad \forall K \text{ kpt.}$

For $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ we have $i(L) = i(0) = m - n$

19.04.2011

S. 3 Beispiel in ∞ -dim

2

Schritt 1: Aus $\langle f \circ B^T, g \rangle = \langle f, g \circ B \rangle \quad (\forall \text{ Matrizen } B)$ folgt *

Schritt 2: und (**) ist wirklich wahr.

Für: $\langle a_\beta x^\beta, b_{\beta'} x^{\beta'} \rangle := \delta_{\beta\beta'} \cdot \underbrace{a_\beta}_{\text{Monom}} \cdot \underbrace{b_{\beta'}}_{\mathbb{R}^n\text{-Skalarprodukt}}$

$x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$

Monom

$\mathbb{R}^n$ -Skalarprodukt