

Beweis (Satz)

Skalarprodukt auf H_m

Idee: $W_m := \ker(\operatorname{ad}_m(A^T)) \stackrel{!}{=} \ker((\operatorname{ad}_m A)^T)$

$$= (\operatorname{Bild} \operatorname{ad}_m A)^\perp \perp \operatorname{Bild}(\operatorname{ad}_m A)$$

lin. alg.

ist zulässige Wahl im NF-Satz aus 6.2 $\Rightarrow$ (a)

Skalarprodukt: $\langle L\psi, \psi \rangle_{H_m} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \psi, L^T \psi \rangle \quad (\forall \psi, \eta \in H_m)$

Ziel: finde Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sodass

$(\operatorname{ad}_m A)^T \stackrel{!}{=} \operatorname{ad}_m(A^T)$

in H_m in $\mathbb{R}^N$ bzgl. Eukl. SP.

(b) folgt dann aus dem Lemma, weil

$$\hat{T}_m g \in W_m = \ker(\operatorname{ad}_m(A^T))$$

(c) folgt, weil Beh. über Lsg. $\Leftrightarrow T_m g(xy) = g T_m g(y)$
 $(\forall x, y, m)$

$$f(\sigma, y) = (\sigma y)' = \sigma y' = \sigma f(y)$$

∞ dim: $L: X \rightarrow X$ | [Kato]

Fredholm operators, Fredholm index

$$i(L) = \dim \ker L - \operatorname{codim}(\operatorname{Range} L)$$

Fredholm alternative $\Leftrightarrow i(L) = 0 \Leftrightarrow \dim \ker L \Leftrightarrow \operatorname{codim} \operatorname{Range} L$
 $\Leftrightarrow (\text{inj.} \Leftrightarrow \text{surj.})$

Lemma 1: $\{\text{Fredholm}\} = \text{open}$ (in bd. op), index = stetig

Lemma 2: $L \in \text{Fredh}(i) \Rightarrow L + K \in \text{Fredh}(i) \quad \forall K \text{ kpt.}$

For $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ we have $i(L) = i(0) = m - n$

19.04.2011

S. 3 Beispiel in ∞ -dim

2

Schritt 1: Aus $\langle f \circ B^T, g \rangle = \langle f, g \circ B \rangle \quad (\forall \text{ Matrizen } B)$ folgt *

Schritt 2: und (**) ist wirklich wahr.

Für: $\langle a_\beta x^\beta, b_{\beta'} x^{\beta'} \rangle := \delta_{\beta\beta'} \cdot \underbrace{a_\beta}_{\text{Monom}} \cdot \underbrace{b_{\beta'}}_{\mathbb{R}^n\text{-Skalarprodukt}}$

$x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$

Monom

$\mathbb{R}^n$ -Skalarprodukt

Dyn3Schritt 1:

$$\text{Seien } f, g \in C^\infty. \text{ Dann } \langle f, e^{-At} g \circ e^{At} \rangle \\ = \langle e^{-At} f, g \circ e^{At} \rangle = \langle e^{-At} \cdot (f \circ e^{At}), g \rangle$$

$$\Rightarrow \left. \frac{-\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \langle f, (\text{ad } A) g \rangle = \langle \text{ad}(A^T) f, g \rangle$$

|| def.

$$\langle (\text{ad } A)^T f, g \rangle \quad (\forall f, g), \text{ also} \\ (\text{ad } A)^T = \text{ad}(A^T)$$

Schritt 2: Ganz mieser Buchhaltungstrick

Betrachte zunächst Polynome (skalar) p, q und
entsprechendes $\langle p, q \rangle$. Dann gilt $\langle p, q \rangle = (p(\partial)q)(\sigma)$.

Indem wir für $p(x) := \sum a_k x^k$ setzen:

$$p(\partial) := \sum a_k \partial_x^k \quad \partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$$

Denn: bilinear, OK auf Monom-Basis. Wir behaupten

$$(***) \quad (p(\partial))(q \circ B) \stackrel{!}{=} ((p \circ B^T)(\partial)q) \circ B^T$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad (***) : (f \circ B^T, g) &= \sum_k \langle p_k \circ B^T, q_k \rangle = \sum_k (p_k \circ B^T)(\partial) q_k \quad f = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \\ &= \sum_k ((p_k \circ B^T)(\partial) q_k)(\sigma) \quad g = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \\ &\quad \text{mit } \sigma \circ B^T = \sigma \\ &= \sum_k (p_k(\partial) (q_k \circ B))(\sigma) = \langle f, g \circ B \rangle \end{aligned}$$

(***)

Zeige nur noch (***) für Monom $p = x^k$ (beide Seiten bilinear)

Induktion über $m = |k| = k_1 + \dots + k_n$

$$\begin{aligned} \underline{m=1} \quad p &= x_i \quad \text{l. S.} \quad p(\partial)(q \circ B) = \partial_{x_i}(q \circ B) \\ &= \sum_j ((\partial_j q) \circ B) B_{ji} \quad \text{kettenregel} \quad \parallel = B_{ji}^T \end{aligned}$$

$$\text{r. S.: } ((p \circ B^T)(\partial)q) \circ B = \sum_j (B_{ji}^T \partial_j q) \circ B$$

... $\rightarrow m$ Sei $p = r \cdot s$, Grad $r, s < \text{Grad } p$.

$$\text{Dann gilt } ((r \cdot s)(\partial))(q \circ B) = r(\partial)(s(\partial)(q \circ B))$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{=} r(\partial) \left(\underbrace{(s \circ B^T)(\partial)q}_q \circ B \right)$$

$$\stackrel{\text{Ind}(r)}{=} (r \circ B^T) (\partial) ((s \circ B^T) (\partial) q) \circ B = \underbrace{((r \circ s) \circ B^T) (\partial) q}_P \circ B$$

wie behauptet, (*)

□

6.4 Beispiele

Vorbemerkung: Unsere Theorie der Normalform liefert "einfachere" Vektor-Felder $g = Ax + g_2 + g_3 + \dots$, deren Taylorterme $g_n(x) := \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) x^n$ bis zu beliebig hoher Ordnung in

$$W_m := \text{Kern}(\text{ad}_m A^T)$$

liegen, für $m \geq 2$. Wenn wir die Dynamik verstehen wollen, treten drei Probleme auf:

Problem 1: Könnten die exponentiell fallenden Terme in g , über die wir gar nichts weiter wissen, die Dynamik beeinflussen (nur ja, evtl. nach $g \Rightarrow \Rightarrow hz$ langen Zeiten).

Problem 2: Ist die Dynamik eventuell schon durch die niedrigsten Taylorterme bestimmt?

Problem 3: Welche Form von g eignet sich überhaupt gut, um die resultierende Dynamik "leicht" zu verstehen.

Wir werden den alg. Teil betrachten und für P1-P3 auf die Literatur verweisen.

Beispiel 1: Linearisierung

Sei $f(x) = Ax + \dots \in C_1^\infty(A)$, A diagonalisierbar: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$

Behauptung: Falls Nicht-Resonanz gilt, d.h.

$$(*) \quad \lambda_j - \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \alpha_k \neq 0 \quad (\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^N, m = |\alpha| \geq 2)$$

dann ist $W_m = \text{Kern} \text{ad}_m A^{(T)} = \{0\}$, d.h. $\text{ad}_m A: H_m \rightarrow H_m$ surj.

Dyn 3

also $g(x) = Ax + \dots$
exp. flach

[Poincaré] Thesis

Beweis: $(\text{adm}) \underbrace{x^\beta e_j}_{h(x)} = A x^\beta e_j - \sum_k e_j (\partial_k x^\beta) \underbrace{(Ax)_k}_{\lambda_k x_k}$
 $= (\lambda_j - \sum_k \beta_k \lambda_k) \underbrace{x^\beta e_j}_{x^\beta e_j}$
 Eigenwert
 $= \mu_{j,\beta} \text{ von } \text{adm } A$

Also ist $\text{adm } A$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\mu_{j,\beta} \neq 0$ (*) $\square$

Grobman, Hartman: C^0 -Linearisierung für $0 \notin \text{Re spec } A$ $\square$

Shoshitaishvili, Palmer: —"— auf $\dot{x} = x, \dot{y} = -y, \dot{z} = \varphi(z)$

Soll ("Sternberg conditions"): A hyp. C^k -lin. zentrums-mf.

falls (*) für alle $|\beta| \leq s(k) < \infty$ (1985)

Takens (1970s): Eine Art C^k -Shoshitaishvili, Trf. auf

$$\dot{x} = \underbrace{A(z)x}_{\text{hyp}}, \quad \dot{z} = \varphi(z) \quad (\text{ZMF}), \quad \varphi(0) = 0$$

falls (*) für alle $|\beta| \leq \tilde{s}(k, A)$

Bsp 2: Hopf-Verzweigung

(Poincaré-Aldronov-E. Hopf)

Betr. einfache imaginäre EW. $\pm i\omega$ im sonst hyp.

Spektrum von A . ZMF $\Rightarrow$ OE $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resonanz: $i = (\underbrace{2i}_{\beta_1} + \underbrace{1(-i)}_{\beta_2}) = 0$

Normalfall: $A^T = -A$ vertauscht mit A also

6.3 Satz (e): Normalform g vertauscht mit

Drehgruppe $\Gamma := "c(\text{os})" \{ e^{A^T t} \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ e^{At} \mid t \in \mathbb{R} \}$

komplexe Koord: z und $\bar{z}$ für $(x, y) \rightarrow x + iy$

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \bar{z}^k + \dots$$

Äquivarianz $g(e^{it} z) = e^{it} g(z) \quad (\forall t, z)$

heißt: $g(e^{it} z) = \sum_{k, l \geq 0} \alpha_{k, l} e^{i(k-l)t} z^k \bar{z}^l + \dots$

" $\parallel$ "
 $e^{it} g(z) = \sum_{k, l \geq 0} \alpha_{k, l} e^{it} z^k \bar{z}^l$

Also: $\alpha_{k, l} = 0$ oder $k - l = 1$ d.h. $(k = l + 1)$

$g(z) = \sum_{l \geq 0} \alpha_l |z|^{2l} z + \dots$ N.B.: $\alpha_0 = i$

Polarkoord $z = r e^{i\varphi}$

$\dot{r} e^{i\varphi} + i r e^{i\varphi} \dot{\varphi} = \dot{z} = g(z) = \left(\sum_{l \geq 0} \alpha_l r^{2l} \right) r e^{i\varphi} + \dots$

also $\dot{r} = \left(\sum_{l \geq 0} (\operatorname{Re} \alpha_l) r^{2l} \right) r + \dots$

$\dot{\varphi} = \sum_{l \geq 0} \operatorname{Im} \alpha_l r^{2l} + \dots$

"..." weglassen (Problem 1!)

$\dot{r} = (\operatorname{Re} \alpha_1) r^3 + \dots$

$\dot{\varphi} = 1 + (\operatorname{Im} \alpha_1 + \dots) r^2 + \dots$

Analog lassen sich Vektorfelder mit

1dim reellen Parameter λ diskutieren: $\dot{x} = f(\lambda, x)$, für $\lambda = 0$

wie oben. Wir erhalten λ -abh. Normalform

$\dot{z} = g(\lambda, z) = \left(\sum_{l \geq 0} \alpha_l(\lambda) |z|^{2l} \right) z + \dots$

Selbe Hm-Zerlegung wie für $\lambda = 0$ nutzbar!) Für EW.

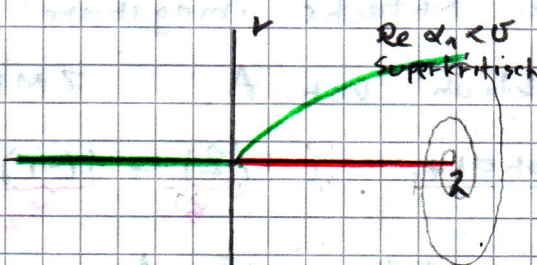
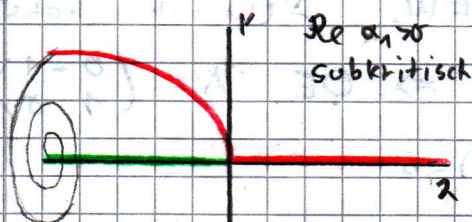
$\alpha_0(\lambda) = \lambda + i$ gilt dann

$\dot{r} = (\lambda + \operatorname{Re} \alpha_1 r^2 + \dots) r$

$\dot{\varphi} = 1 + \operatorname{Im} \alpha_1 r^2 + \dots$

periodischer Orbit $\dot{r} = 0$

$r^2 = -\frac{\lambda}{\operatorname{Re} \alpha_1} + \dots$



Beispiel 3: Takens - Bogdanov Punkte, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

spec A

Arnold (1972, 1975)

(1976)

stat.
Verzweigung
Gleichgewichte

Hopf

Normalform in $\mathbb{R}^2$ $g(x) = Ax + g_2 + \dots$

$$g_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k \quad a_k \in \mathbb{R}^2$$

$$\in \text{Ker}(\text{ad}_m A^T), \quad A^T x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (\text{ad}_m A^T) g_m(x) = A^T g_m(x) - g'_m A^T x$$

$$= \sum_{k=0}^m A^T a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k - \sum_{k=0}^m (\partial_{x_2} \dot{x}_1^{m-k} x_2^k) \cdot x_1 a_k$$

$$= \sum_{k=0}^m A^T a_k \dot{x}_1^{m-k} x_2^k - \sum_{k=0}^m k x_1^{m-k} x_2^{k-1} a_k$$

$$= A^T a_m x_2^m + \sum_{k=0}^{m-1} (A^T a_k - (k+1) a_{k+1}) \dot{x}_1^{m-k} x_2^k$$

Also gilt in NF:

$$A^T a_m = 0 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1} A^T a_k$$

Wegen $(A^T)^2 = 0$ folgt a_0 beliebig, $a_1 = A^T a_0$,

$$a_2 = \dots = a_m = 0, \quad m \geq 0$$

Ausschreiben bis 2. Ordnung

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1^2 + \dots$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + \dots$$

Mit zwei Parametern α, β "entfaltet" man den doppelten Eigenwert 0, in $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, zum V-Feld

"Pendel:"

$$\vartheta_1 := x_1, \quad \vartheta_2 := x_2 + \alpha x_1^2 + \dots$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = a \vartheta_1^2 + b \vartheta_1 \vartheta_2 + \dots$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \vartheta_1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_1 \vartheta_2$$

(Koeff. a, b auf $1, \pm 1$ normieren durch Skalierung 1.

Satz: [Bergshoeff]:

Für ① $\dot{x} = f(v, x)$ mit $f(0, x) = Ax + \dots$ gilt unter gewissen Nicht-Entartungs-Bedingungen an f dass

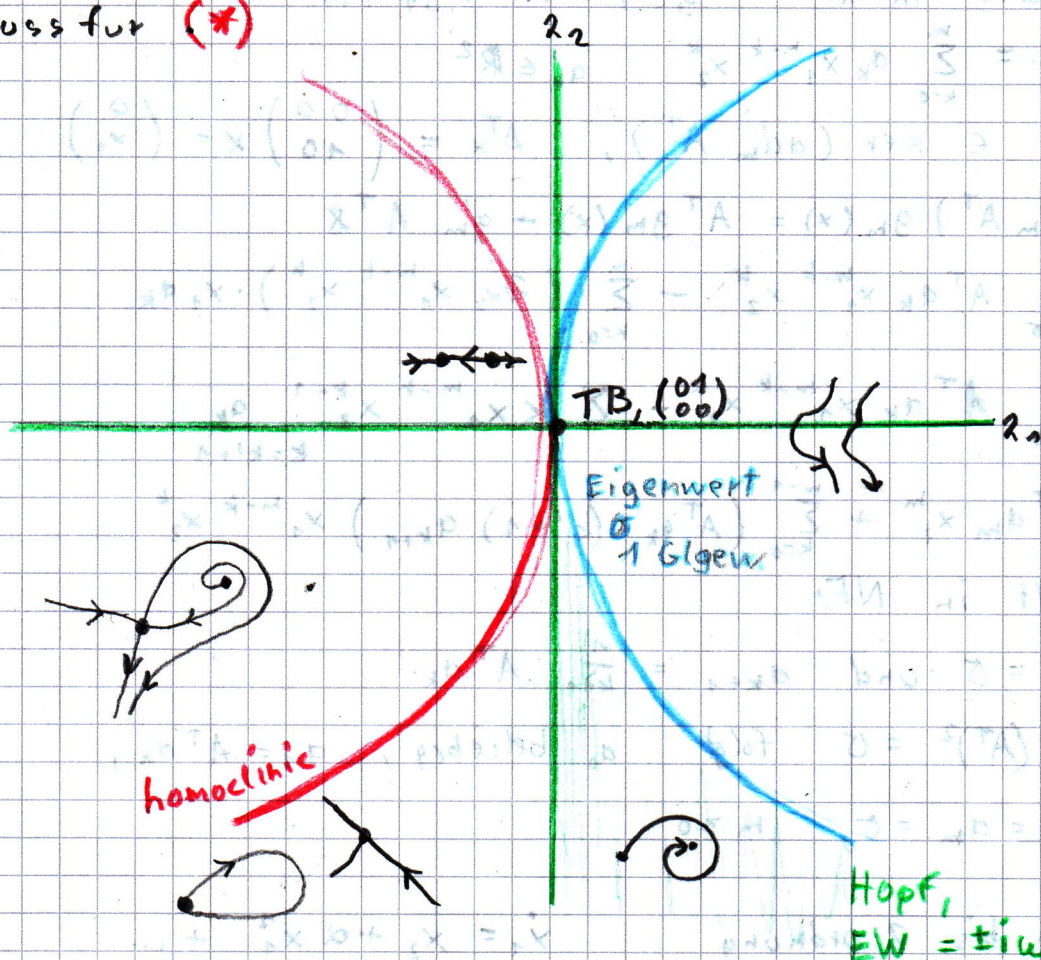
① äquivalent ist zu $\dot{x} = \lambda(v) x$, mit $\lambda = \lambda(v)$

10
Homö

$$s_3 = \Xi(p, x)$$

stetig, $\Xi(p, \cdot) \in C^0\text{-Homöo}$

Fluss für (*)



3

6.5 Iterations

26.09.2011

Consider $F = Bx + \dots \in C_1^\infty(B)$ with $B \in GL(N)$ invertible, i.e. a local diffeo F with fixed point $0 \in \mathbb{R}^N$

Trf. $x = \Phi(y) = y + \dots \in C_1^\infty(\text{id})$, loc. Diffeo

transforms iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ to $y_{n+1} = G(y_n)$

$$(\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi)(y_n) = By_n + G_2(y_n) + \dots$$

What does this do to the coefficients?

$$(\Phi \circ G)(y) = (F \circ \Phi)(y)$$

Compare order m in y :

$$G_m + \dots + \Phi_m \circ B = F_m + \dots + B \circ \Phi_m$$

Where "... are terms involving $G_2, \dots, G_{m-1}, B,$

$F_2, \dots, F_{m-1}, \Phi_2, \dots, \Phi_{m-1}$. Therefore

$$G_m = B \circ \Phi_m - \Phi_m \circ B + R_m(\text{p.o.t.})$$

Therefore we can choose $\Phi \in C_1^\infty(\text{id})$ such that