

$$\dot{x} = h(\lambda, x) = A(\lambda)x + \dots \in \mathbb{R}^N, C^k, k \geq 2$$

i) $\mu_0 = i$ algebraisch einfacher EW von $A(0)$

ii) Nicht-Resonanz $n\mu_0 \notin \text{spec } A(0) \quad n \neq \pm 1$

iii) Transversalität $\text{Re } \mu'(\lambda) \neq 0 \quad \text{in } \lambda = 0$

$\Rightarrow$ Zweig periodischer Orbits

$$s \mapsto (\lambda(s), \underbrace{T(s)}_{\text{min. Periode}}, x(s, \cdot)) \subset \mathbb{C}^{k-1}$$

$$\partial_s|_{s=0} x(s, t) = e^{it} y_{(r)} \neq 0 \quad (\text{komp. geschrieben})$$

$$y_{(r)} \in \text{Eig}(i, A(0))$$

Beweis: Äquivalente L-S. $\swarrow$ skaliert Periode auf 2π

$$\text{Löse } (f(\lambda, T, x(\cdot)))(t) = \dot{x}(t) - \frac{T}{2\pi} h(\lambda, x(t)) = 0$$

$$f: \mathbb{R}^2 \times \underbrace{\tilde{C}^1}_{2\pi\text{-per}} \rightarrow \tilde{C}^0, \quad f(\lambda, T, 0) = 0$$

$$\text{L-S. } Qy := \langle e_{(e)}, y \rangle e_{(r)}$$

$$\langle g, h \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau)^T h(\tau) d\tau$$

$$i y_{(r)} = A_0 y_{(r)}, \quad i y_{(e)}^T = y_{(e)}^T A_0, \quad \bar{y}_{(e)}^T y_{(r)} = 1$$

$$e_{(r)} = e^{it} y_{(r)}$$

$$\mathcal{L} = D_x f(0, T=2\pi, 0)$$

Klartext:

$$Qy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} y_{(e)}^T y(\tau) d\tau e^{it} y_{(r)}$$

$$S^1\text{-Äquivarianz } (v x)(t) := x(t + v),$$

$$v \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \text{SO}(2)$$

$$f(\lambda, T, v) = v f(\lambda, T, x)$$

$$Qv y = v Q y$$

$$(\forall v)$$

Reduzierte Gleichung:

$$0 = \Phi(\lambda, T, z) := Q f(\lambda, T, z e_{(r)} + V(\lambda, T, z e_{(r)}))$$

$$= \langle e_{(e)}, f(\dots) \rangle e_{(r)}$$

$$\tilde{\Phi}(\lambda, T, z) \in \mathbb{C}$$

$$\text{Äquivarianz } \tilde{\Phi}(\lambda, T, e^{iv} z) = e^{iv} \tilde{\Phi}(\lambda, T, z) \quad (\forall v)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Phi}(\lambda, T, z) = \underbrace{\varphi(\lambda, T, r^2)}_{\in \mathbb{C}} z, \quad z = re^{i\varphi}$$

$$\varphi(0, 2\pi, 0) = 0$$

$$\partial(\lambda, T) | \varphi(\lambda, T, 0) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \mu'(0) & 0 \\ -\operatorname{Im} \mu'(0) & -\frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

7.6 Hopf - Verzweigung reversibler Systeme

Def. Wir nennen $\dot{x} = h(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, reversibel wenn lineare Involution R von $\mathbb{R}^N$ existiert, d.h. $R^2 = \operatorname{id}$.
 $(\mathbb{R}^2$: Spiegelung, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ..., id , Drehung von 180° , $-\operatorname{id}$)
 sodass gilt

$$h(Rx) = -Rh(x)$$

d.h. $x(t)$ Lösung $\Leftrightarrow Rx(-t)$ Lösung

d.h. Fluss Ψ_t von h erfüllt:

$$R^{-1} \Psi_t R = \Psi_{-t} = (\Psi_t)^{-1}$$

$$\Rightarrow (R \Psi_t)^2 := R \Psi_t R \Psi_t = \operatorname{id}$$

d.h. $\tilde{R} := R \Psi_t$ ist auch Involution
 (im allgemeinen nicht linear)

[Arnold] $\Psi_t = R \tilde{R}$, d.h.

reversible Ψ_t sind Produkte von Involutionen.

Wichtige Beispiellasse

(i) $\ddot{u} + g(u) = 0$ $u \in \mathbb{R}^n$

(NB: wenn $g(u) = \nabla_u G(u)$ Potential

$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat, dann ist (i) Hamiltonsch, wir fordern das aber nicht!)

$$\dot{u} = v$$

$$R \dot{v} = -g(u)$$

$$R \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

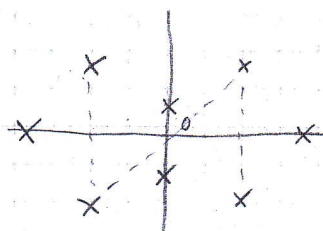
$$x := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2n}$$

$$h(x) := \begin{pmatrix} v \\ -g(u) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(Rx) = -Rh(x)$$

Beispiel: $h(x) = Ax$, linear. Dann $RA = -AR$,

d.h. $-A = RAR^{-1} = RAR$ hat selbes spec wie A
spec A



Komplexe Eigenwerte
kommen als Quadrupel außer
reell: zu zweit
imaginär: zu zweit

NB: Alg Einf. EW $\mu_0 = \pm i$ kann nicht zu
komplexem 4-Pack splitten, kann also
Im-Achse nicht verlassen.

Für $\mu_0 = \pm i$ alg. einf. betrachte

$$i y(r) = A y(r); \quad \bar{y}(r)^T y(r) = 1; \quad y(r)^T = y(r)^T A$$

Dann folgt für orthogonale $R = R^{-1} = R^T \nrightarrow$

$$A(R y(r)) = -RA y(r) = -i R y(r)$$

$$\text{d.h. ex. } \alpha \in \mathbb{C} \text{ mit } R y(r) = \alpha \bar{y}(r)$$

$$y(r) = R^2 y(r) = R \alpha \bar{y}(r) = \alpha R \bar{y}(r) = \alpha \bar{\alpha} y(r)$$

$$\text{d.h. } \alpha \bar{\alpha} = 1, \quad \alpha = e^{i\varphi}$$

$$R(e^{-i\varphi/2}) y(r) = e^{-i\varphi/2 + i\varphi} \bar{y}(r) = \overline{e^{-i\varphi/2} y(r)}$$

$$\text{Analog: } R \bar{y}(r) = \beta y(r) \text{ und}$$

$$\text{wegen orthogonal: } 1 = \bar{y}(r)^T y(r) = (R \bar{y}(r))^T R y(r) =$$

$$= \bar{\beta} \alpha \bar{y}(r)^T y(r) \quad \text{d.h. } \alpha = \beta$$

Ersetzen wir also (OE) $e^{\pm i\varphi/2} y(r)$ durch $y(r)$

so folgt einfach $R y(r) = \bar{y}(r)$, Spiegelung

$$* \text{ OE} \quad R y(r) = \bar{y}(r)$$

Satz:

Sei h reversibel zu R , $h \in C^k$, $k \geq 2$,

$$h(x) = Ax + \dots \quad (h(0) = 0).$$

i) $\mu_0 = \pm i$ alg. einfache EW von A

ii) $n \mu_0 \notin \text{spec } A \quad n \neq \pm 1$

$$\operatorname{Re}(R z \gamma(r)) = \operatorname{Re}(z \overline{\gamma(r)}) = \\ = \operatorname{Re}(\overline{z} \gamma(r)),$$

also operiert R als komplexe Konjugation in der Komponente z .

L-S Reduktion wie bei Hopf führt jetzt auf ~~eine~~ reduzierte Gleichungen:

$$0 = \Phi(T, z) = Q f(T, z e(r) + V(T, z e(r))) = \\ = \langle e(r), f(\dots) \rangle e(r)$$

$$\tilde{\Phi}(T, z) = \varphi(T, r^2) z \quad r = |z|$$

Und was macht σ ? Äquivalenz $\Rightarrow$

$$\tilde{\Phi}(T, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{von } \sigma(z e(r)) \\ \text{in } \mathbb{C}^1}}}{\bar{z}}) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \tilde{\mathbb{C}}^0}}{=} \tilde{\Phi}(T, z)$$

also $\varphi(T, r^2) = -\overline{\varphi(T, r^2)}$, rein imaginär
egal ob z oder $\bar{z}$

d.h. $\operatorname{Re} \varphi(T, z) = 0$ dank Reversibilität
($\Rightarrow$ brauchen nur einen Parameter)

Um die einzige verbleibende echte Gleichung
 $\operatorname{Im} \varphi(T, z) = 0$

zu lösen, erinnern wir uns, dass

$$\varphi(2\pi, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_T \varphi(T=2\pi, z=0) = -\frac{1}{2\pi} \neq 0$$

$$\Rightarrow T(r), z(r), x(t, r) = z(r) e(r)(t) + \underbrace{V(T(\cdot), z(\cdot))}_{o(r)}(t)$$

per Lösung usw, wie gehabt □

7.7 Subharmonische Verzweigung

Betrachte Iterationen $x_{n+1} = h(\lambda x_n) = A(\lambda) x_n + \dots \in \mathbb{R}^N$

$$h(\lambda, 0) = 0, \lambda \in \mathbb{R}^2$$

Satz:

Sei $\mu_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ ^{alg. einfacher} Eigenwert von $A(0)$

p, q teilerfremd, $q \geq 3$,
 μ_0 primitive q -te Einheitswurzel

$(h \in C^k, k \geq q-1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu^q = 1, \\ \mu^m \neq 1 \quad \forall m < q \end{array} \quad 1 = \mu^q}$$

ii) Außer $\mu_0, \bar{\mu}_0$ gibt es keine weiteren q -ten 1-Wurzeln
 iii) $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$ sei lokaler Differ

Dann existiert Abbildung

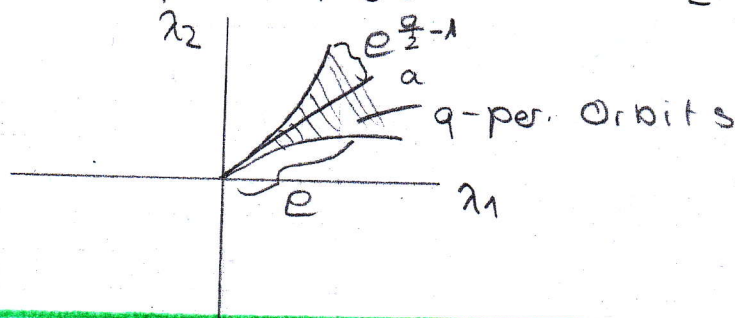
$$(r, \varphi) \mapsto \lambda = \lambda(r, \varphi), \quad \lambda \text{ ist}$$

$2\pi/q$ periodisch in $\varphi \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

sodass $x(r, \varphi)$ minimale Periode q
 unter Iteration von $h(\lambda(r, \varphi), \cdot)$ hat.

Für $q \geq 5$ gilt eine Entwicklung

$$\lambda(r, \varphi) = \lambda_0(r^2) + a r^{q-2} e^{iq\varphi} + o(r^{q-2}).$$



Beweis:

$$\underline{x}_{j+1} = x_j \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{Nq} \quad j = 1, \dots, q$$

Betrachte

$$\begin{aligned} (f(\lambda, \underline{x}))_j &:= x_{j+1} - h(\lambda, x_j) \\ &= (S\underline{x})_j - h(\lambda, x_j) \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} := \{(\underline{x}_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \underline{x}_j \in \mathbb{R}^N, x_{j+q} = x_j (\forall j)\} \\ \cong \mathbb{R}^{Nq}$$

NB $f = 0$ liefert q -periodische Orbits

Zu $A_0 = A(0)$ haben wir

$$\begin{aligned} \mu_0 \chi(r) &= A_0 \chi(r), \quad \bar{\chi}(r)^T \chi(r) = 1, \quad \mu_0 \chi(r)^T = \chi(r)^T A_0 \\ (\mathcal{L}\chi)_j &:= (D_{\underline{x}} f(\lambda, 0) \chi)_j := \chi_{j+1} - A_0 \chi_j \end{aligned}$$

Wegen Vor. ii) folgt $\text{Ker } \mathcal{L} = \langle e(r) \rangle, \quad \langle e(r) \rangle_j = \mu_0^j \chi(r)$

Mit $(e(r))_j := \mu_0^j \chi(r)$ können wir

folgende Projektion wie zuvor definieren

$$Q_Y := \langle e_{(1)}, Y \rangle e_{(1)} \quad \text{mit} \\ \langle g, h \rangle = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \bar{g}_j^T h_j$$

Konkret also

$$(Q_Y)_k = \left(\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \mu_0^{-j} \bar{Y}_{(1)}^T Y_j \right) \mu_0^k Y_{(1)}$$

Äquivarianz $S: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, (Sx)_j := x_{j+1}$

Dann erzeugt S die Gruppe $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ mit Darstellung auf $\tilde{X}$.

Nachrechnen: f, Q äquivariant unter

$$\Gamma = \mathbb{Z}_q \quad (\text{hinterer Term unter jeder Permutation invariant})$$

L-S: Löse red. Gleichung

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z) := Q f(\lambda, z e_{(1)}) + V(\lambda, z e_{(1)}) = 0$$

Betrachte Terme $a_{kj} z^k \bar{z}^j$

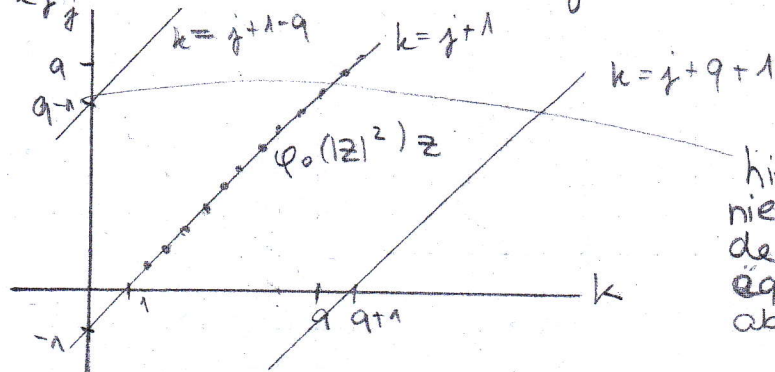
Äquivarianz: S operiert per Multiplikation mit μ_0 auf $\langle e_e \rangle, \langle e_r \rangle$.

Wir können geeignete Potenz $S^{p'}$ wählen, so dass $\mu_0^{p'} = e^{2\pi i/q}$ nämlich $p'p \equiv 1 \pmod{q}$

Äquivarianz unter Multiplikation mit $e^{2\pi i/q}$ heißt aber

$$a_{kj} z^k \bar{z}^j e^{(2\pi i/q) \cdot (k-j)} = e^{2\pi i/q} a_{kj} z^k \bar{z}^j$$

d.h. $a_{kj} = 0$ oder $k \equiv j+1 \pmod{q}$



hier ist der Term niedrigster Ordnung, der zwar $\mathbb{Z}_q$ -äquivariant ist, nicht aber S^1 -äquivariant

Auf diesen Geraden können $a_{kj} \neq 0$ sein

Löse also $0 = \tilde{\Phi}(\lambda, z) = \varphi_0(\lambda, |z|^2) z$

$$+ a \bar{z}^{q-1} + o(|z|^{q-1}), \quad h \in C^{q-1}$$

In Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$

$$0 = re^{i\varphi} \left(\varphi_0(\lambda, r^2) + \alpha r^{q-2} e^{iq\varphi} + o(|r|^{q-1}) \right)$$

$$\varphi_0(0, 0) = 0$$

$$\varphi_0(\lambda, 0) \stackrel{\text{wie Hopt}}{=} \mu_0 - \underbrace{\mu(\lambda)}_{\text{lok. Diffeo}} + o(\lambda)$$

Löse also $\tilde{\Phi}(\lambda, re^{i\varphi})$ auf nach $\lambda = \lambda(r, \varphi)$

Ergänzung Satz: Weiter gilt $x(r, \varphi) = re^{i\varphi} + o(r)$.

1. Satz sehr analog zu Hopt allerdings mit 2 expliziten Parametern $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Transversalität ist nicht nur gefordert für $|\mu(\lambda)|$ zu 1-Kreis sondern auch zum Winkel $2\pi \frac{p}{q}$, entlang des 1-Kreises. DE dürfen wir uns sogar $\lambda = \mu(\lambda)$ selbst als Parameter in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ vorstellen.
2. Wenn wir φ ersetzen durch $\varphi + 2\pi i \frac{p}{q}$ erhalten wir, per $\mathbb{Z}_p$ -Äquivalenz den nächsten Punkt S_x dem q -periodischen Orbit x , aber zum selben λ . Betrachte $\alpha \neq 0$, $q \geq 5$. Sei $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}$ das Innere des Bieres von $(r, \varphi) \mapsto \lambda(r, \varphi)$. Dort finden sich 2 verschiedene q -per. Orbits. Am Rand nur einer (außer an der Spitze $\lambda=0$) und außerhalb gar keiner.

